



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

**ANALÝZA MODÁLNÍHO TLUMENÍ STROJNÍ SOUČÁSTI
POMOCÍ METODY OMA**

THE MODAL DAMPING RATIO ANALYSIS OF THE MECHANICAL PART USING THE OMA METHOD

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Tomáš Sodomka

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Lubomír Houfek, Ph.D.

BRNO 2021

Zadání diplomové práce

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student: **Bc. Tomáš Sodomka**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Inženýrská mechanika a biomechanika
Vedoucí práce: **Ing. Lubomír Houfek, Ph.D.**
Akademický rok: 2020/21

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Analýza modálního tlumení strojní součásti pomocí metody OMA

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Provozní modální analýza je jednou z nejmladších oblastí strukturální dynamiky, která umožňuje experimentálně zjistit modální vlastnosti soustavy pouze z měření vibrační odezvy. Nejjednodušší metody umožňují z modálních vlastností vyhodnotit pouze vlastní frekvence a modální tvary. Práce bude zaměřena na analýzu modálního tlumení získaného pomocí metod provozní modální analýzy. V práci bude provedena rešeršní analýza doposud známých metod na určování modálního tlumení vyhodnocovaného pomocí metody provozní modální analýzy. Vybraná vhodná metoda bude dále rozpracována a následně pomocí ní prakticky vyhodnoceno tlumení pro vybranou strojní součást.

Cíle diplomové práce:

- 1) Rešerše k problematice určování modálního tlumení provozní modální analýzy.
- 2) Určení modálních vlastností vybrané strojní součásti pomocí výpočtového modelování a pomocí experimentální modální analýzy.
- 3) Určení modálních vlastností pomocí provozní modální analýzy vybrané součásti.
- 4) Porovnání a zhodnocení dosažených výsledků.

Seznam doporučené literatury:

BRINCKER, Rune a Carlos VENTURA. Introduction to operational Modal Analysis. Chichester, West Sussex: Wiley, 2015. ISBN 9781119963158.

RAINIERI, Carlo a Giovanni FABBROCINO. Operational modal analysis of civil engineering structures: an introduction and guide for applications. New York: Springer, 2014. ISBN 9781493907663.

AU, Siu-Kui. Operational modal analysis. Singapore: Springer, 2017. ISBN 9789811041174.

ABSTRAKT

Na jedné z prvních hodin studia na Ústavu mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky dostal autor této práce tři základní doporučení týkající se měření:

1. Neměřit
2. Když už měřit, tak neopakovat měření
3. Když už opakovat měření, tak nesrovnávat

Nicméně tato práce směle porušuje všechny tři doporučení.

V úvodní teoretické části stručně seznamuje s kmitáním tlumených soustav s více stupni volnosti a popisuje experimentální přístupy určování modálního tlumení soustav. Zároveň shrnuje přístup Provozní modální analýzy (OMA), vysvětluje princip metody FDD a představuje metodu EFDD (Vylepšená dekompozice ve frekvenční oblasti – Enhanced Frequency Domain Decomposition), která oproti původní metodě, umožňující určování vlastních tvarů a frekvencí, dovoluje určit i modální tlumení jednotlivých tvarů.

Jedním z výstupů práce je skript v prostředí programu Matlab, jenž umí vyhodnocovat vibrace soustavy metodou EFDD. Skript je nejdříve testován výpočtovým modelováním, kdy z modelové soustavy s předem definovaným modálním tlumením tlumení určuje.

Následně práce přechází k vlastnímu měření reálné soustavy - vetknutému prutu, který je analyzován pomocí Experimentální modální analýzy (EMA) a OMA, přičemž z druhé varianty byla použita metoda EFDD komerční od společnosti Brüel a Kjær a naprogramovaný skript.

V závěru jsou určená tlumení navzájem srovnávána.

Diplomová práce navazuje na práci Ing. Miroslava Popa – *Ověřování věrohodnosti měřící metody z oblasti modální analýzy* [1]. Z této práce je přebrána část dat. Konkrétní případy využití dat jsou vždy uvedeny v patřičné pasáži textu.

KLÍČOVÁ SLOVA

vibrace, provozní modální analýza, vlastní frekvence, modální vlastnosti, tlumení, poměrný útlum, modální analýza, Vylepšená dekompozice ve frekvenční oblasti

ABSTRACT

In one of the first hours of study at the Institute of Solid Mechanics, Mechatronics and Biomechanics, the author of this thesis received three basic recommendations regarding measurement:

1. Do not measure
2. If you measure, do not repeat the measurement
3. If you repeat the measurement, do not compare the measurements

However, this thesis boldly violates all three recommendations.

In the introductory theoretical part, it briefly introduces the vibration of multi-degree of freedom damped systems and describes experimental ways of determining the modal damping. It also summarizes the Operational Modal Analysis (OMA) approach, explains the principle of the FDD method, and introduces EFDD (Enhanced Frequency Domain Decomposition) method which allows to determine not only natural frequencies and shapes as FDD does, but also modal damping of the shapes.

A script in Matlab environment for processing vibrations using EFDD method is one of the thesis outputs. The script is first tested by computational model, where a model system with known damping is tested and damping is determined by the script.

Subsequently, the work moves to the actual measurement of the real system - a bonded bar which is analysed by Experimental Modal Analysis (EMA) and OMA, while the second variant uses commercial EFDD method (Brüel a Kjaer company) and programmed script. In the conclusion of the thesis the damping results are compared to each other.

The diploma thesis continues in Ing. M. Pop's thesis – *Modal Analysis Experimental Method Verification* [1]. From this work a part of measured data is taken. Specific cases of data use are always listed in the appropriate section of the text.

KEYWORDS

vibrations, operational modal analysis, natural frequency, modal properties, damping, damping ratio, modal analysis, Enhanced Frequency Domain Decomposition

SODOMKA, Tomáš. *Analýza modálního tlumení strojní součásti pomocí metody OMA*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, 2021, 74 s. Diplomová práce. Vedoucí práce: Ing. Lubomír Houfek, Ph.D.

Prohlášení autora o původnosti díla

Jméno a příjmení autora: Bc. Tomáš Sodomka
VUT ID autora: 184270
Typ práce: Diplomová práce
Akademický rok: 2020/21
Téma závěrečné práce: Analýza modálního tlumení strojní součásti pomocí metody OMA

Prohlašuji, že svou závěrečnou práci jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucí/ho závěrečné práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené závěrečné práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této závěrečné práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a/nebo majetkových a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

Brno

.....

podpis autora*

*Autor podepisuje pouze v tištěné verzi.

PODĚKOVÁNÍ

Rád bych poděkoval vedoucímu diplomové práce panu Ing. Lubomíru Houfkovi, Ph.D. za odborné vedení, konzultace, trpělivost a podnětné návrhy k práci.

Obsah

Seznam zkratek	15
Úvod	17
Motivace a problémová situace	17
Formulace problému	18
Cíle práce	18
Rešerše	19
Knižní zdroje	19
Vědecké články	20
1 Teorie kmitání mechanických soustav	21
1.1 Tlumení mechanických soustav	21
1.1.1 Přehled základních typů modelů tlumení	21
1.1.2 Proporcionální tlumení	22
1.2 Řešení soustav s více stupni volnosti	22
1.2.1 Poměrný útlum	22
1.2.2 Soustava s více stupni volnosti	24
1.2.3 Homogenní řešení – volné kmitání	25
1.2.4 Nehomogenní řešení – nucené kmitání	28
1.2.5 Logaritmický dekrement	29
2 Experimentální modální analýza	31
2.1 SDOF metody analýzy	31
2.1.1 Peak picking	33
2.1.2 Circle fit	34
3 Provozní modální analýza	35
3.1 Frequency domain decomposition	35
3.1.1 Předpoklady použití FDD	35
3.1.2 Princip	35
3.2 MAC	37
3.3 Enhanced Frequency Domain Decomposition	39
3.3.1 Princip	39
3.3.2 Bell identification	39
3.3.3 IDFT	41
3.3.4 Stanovení tlumení	41

4 Úvod do praktické části	43
5 Programové řešení – EFDD skript	45
5.1 Vstupní data	45
5.2 Bell Identification	45
5.3 IDFT a rekonstrukce signálu	45
5.4 Výběr okna a logaritmický dekrement	47
5.5 Statistické zpracování dat	47
5.6 Výstupní data	47
6 Modelová soustava – výpočtové modelování	49
6.1 Skript Odezva	50
6.1.1 Vstupy	50
6.1.2 Výstupy	50
6.1.3 Simulink	50
6.2 Modelová soustava	50
6.3 Výsledky	51
7 Strojní součást	55
7.1 Model soustavy	55
7.2 Experimentální modální analýza vybrané součásti	56
7.3 Provozní modální analýza vybrané součásti	57
7.3.1 Matlab skript – výsledky	57
7.3.2 OMA Pulse	58
8 Srovnání výsledků	61
8.1 Modelová soustava	61
8.2 Strojní součást	61
8.3 Platnost výsledků	63
Závěr	65
Literatura	67
Seznam obrázků	69
Seznam tabulek	71
Obsah elektronické přílohy	73

Seznam zkratek

OMA	Provozní modální analýza – Operational Modal Analysis
EMA	Experimentální modální analýza – Experimental modal analysis
FDD	Dekompozice ve frekvenční oblasti – Frequency Domain Decomposition
EFDD	Vylepšená dekompozice ve frekvenční oblasti – Enhanced Frequency Domain Decomposition
SSI	Stochastická identifikace podprostoru – Stochastic Subspace Identification
MKP	Metoda konečných prvků – Finite Element Method
PSD	Plošná výkonová hustota – Power Spectral Density
SVD	Singulární rozklad – Singular Value Decomposition
ÚMTMB	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky – Institute of Solid Mechanics, Mechatronics and Biomechanics
FRF	Frekvenční přenosová funkce – Frequency Response Function
SDOF	Jeden stupeň volnosti – Single Degree of Freedom
MAC	Kritérium modální věrnosti – Modal Assurance Criterion
IDFT	Zpětná diskétní Fourierova transformace – Inverse Discrete Fourier Transformation
IFFT	Zpětná rychlá Fourierova transformace – Inverse Fast Fourier Transformation

Úvod

Motivace a problémová situace

K experimentálnímu určení modálních parametrů soustav se standardně používá EMA (Experimentální modální analýza – Experimental modal analysis). Tato analýza využívá přenosové funkce systému. Nicméně k určení přenosové funkce je třeba znát buzení soustavy a to nemusí být automaticky známé. Existují soustavy, u kterých buzení nelze určit. Jednoduše proto, že jsou příliš velké (mosty a budovy) a nelze je kontrolovaně rozvibrovat anebo se jedná o citlivá zařízení a ráz nebo silné vibrace by je mohly poškodit.

Existuje proto modální analýza, tzv. OMA (Provozní modální analýza – Operational Modal Analysis), která zařizuje metody pro určení modálních parametrů, které nepotřebují znát přesné budící účinky, ale kladou na ně pouze určité požadavky (například aby se buzení podobalo bílému šumu). OMA zahrnuje metody jak deterministické, tak stochastické. Jednou z deterministických metod je FDD (Dekompozice ve frekvenční oblasti – Frequency Domain Decomposition), která ve svém algoritmu využívá singulární rozklad (SVD) plošné výkonové hustoty měřených signálů. Touto metodou lze určit vlastní tvary a tlumené vlastní frekvence soustavy a v minulosti již byla v rámci diplomové práce [1] na ÚMTMB řešena Ing. Miroslavem Popem.

Na práci [1] navazuje tato závěrečná práce a metodu rozvádí na EFDD (Vylepšená dekompozice ve frekvenční oblasti – Enhanced Frequency Domain Decomposition), která dovoluje navíc určit i modální tlumení a netlumené vlastní frekvence.

OMA metody jsou relativně mladé a ne tak často používané, nicméně mají do budoucna velký potenciál v rozšíření. V současnosti existují komerční programy zabývající se měřením a vyhodnocováním za pomoci OMA, ale pro odbornou veřejnost se jedná o jakýsi "black-box", který měření vyhodnocuje. Může se tedy stát, že když uživatel nezná podstatu zpracování, může získávat špatné výsledky aniž by to zaznamenal. Anebo obdobně může dostávat očividně chybné výsledky, ale bez znalosti fungování algoritmu nemusí najít příčinu a řešení chyb.

Tato práce si tedy klade za cíl vysvětlit fungování EFDD a v rámci možností poskytnout autorem vytvořený skript výše zmíněného "black-boxu" včetně ověření jeho správnosti.

Jelikož se jedná o navazující práci, předpokládá se od čtenáře elementární znalost problematiky.

Formulace problému

Problém je definovaný nemožností verifikace výsledků měření tlumení pomocí provozní modální analýzy, konkrétně metodou EFDD z důvodu neznalosti principu fungování této metody.

Cíle práce

1. Rešerše k problematice určování modálního tlumení provozní modální analýzy.
2. Určení modálních vlastností vybrané strojní součásti pomocí výpočtového modelování a pomocí experimentální modální analýzy.
3. Určení modálních vlastností pomocí provozní modální analýzy vybrané součásti.
4. Porovnání a zhodnocení dosažených výsledků.

Rešerše

Prameny, jenž se problematikou provozní modální analýzy a zejména určováním modálního tlumení zabývají:

Knižní zdroje

Brincker R. & Ventura C.

Introduction to Operational Modal Analysis [2]

Kniha nabízí úvod do provozní modální analýzy. V prvních kapitolách nejdříve poskytuje široký základ z oblastí klasické dynamiky, náhodných vibrací, transformací, zpracování signálu a dalších oblastí z pole dynamiky a matematiky potřebných v dalších kapitolách k zavedení provozní modální analýzy. Vzhledem k rozsáhlému úvodu je kniha vhodná i jako samostatná učebnice dynamiky.

Kniha vysvětluje principy a základní myšlenky metod provozní modální analýzy, včetně FDD metody. O metodě EFDD se zde autoři zmiňují pouze krátce.

Rainieri, C., & Fabbrocino, G.

Operational modal analysis of civil engineering structures: An introduction and guide for applications [3]

Tato kniha se zabývá provozní modální analýzou z pohledu oboru, pro který byla původně OMA vytvořena, tj. stavební inženýrství. Kniha předpokládá předchozí znalosti v oboru a je ideální pro čtenáře, který "ví, co hledá" a zajímá ho odpověď ve větší obecnosti.

Kniha obsahuje všechny základní metody OMA z frekvenční i časové domény včetně SSI (Stochastická identifikace podprostoru – Stochastic Subspace Identification) metod i mnohé pokročilé metody.

Au, S.

Operational modal analysis: Modeling, Bayesian inference, uncertainty laws [4]

Jedná se o knihu zabývající se stochastickými přístupy v provozní modální analýze. Kniha zároveň poskytuje rozsáhlý úvod do stochastických procesů obecně.

Pro tuto závěrečnou práci zdroj není relevantní, ale využití najde při studiu SSI metod.

Vědecké články

Gade, S. et al.

Frequency Domain Techniques for Operational Modal Analysis [5]

Článek stručně vysvětluje myšlenku FDD a EFDD metody a demonstruje EFDD metodu na měření vlastních tvarů a tlumení modelu lopatky větrné turbíny.

Pioldi, F. et al.

A refined FDD algorithm for Operational Modal Analysis of buildings under earthquake loading [6]

Tento článek se oproti předcházejícímu věnuje více i matematickému popisu obou metod a představuje jejich modifikace pro přesnější získání modálních parametrů při buzení seismickými otřesy.

Jacobsen, N.-J. et al.

Using Enhanced Frequency Domain Decomposition as a Robust Technique to Harmonic Excitation in Operational Modal Analysis [7]

Tato práce popisuje stejně jako předchozí metodu EFDD, nicméně jejím hlavním přínosem je představení metody New-EFDD.

Jak bude uvedeno později, jedním z předpokladů EFDD metody je buzení soustavy bílým šumem. Metoda New-EFDD umožňuje zeslabit tento předpoklad a dovoluje, aby se ve spektru v malé míře nacházely i harmonické složky buzení. Článek rovněž obsahuje i popis měření, které spolu porovnává EFDD a New-EFDD.

Lorenzoni F. et al

Structural health monitoring of the Roman Arena of Verona, Italy [8]

Pro začátečníka v oboru má tento článek spíše motivační než vzdělávací charakter a ze stejného důvodu je zde také zmiňován.

Článek popisuje měření římského amfiteátru (resp. jeho části – jednoho křídla) v italské Veroně. Jednalo se o komplexní měření nejenom OMA EFDD metodou s cílem zjistit vliv statického, dynamického i seismického zatížení na křídlo. Zjištěné výsledky sloužily nejenom pro monitorování technického stavu konstrukce, ale zároveň naměřená data posloužila pro zpřesnění MKP modelů.

Cílem práce bylo získat hlubší vhled do popisu technického stavu obdobných struktur a možnost tak lépe předcházet mezním stavům.

1 Teorie kmitání mechanických soustav

1.1 Tlumení mechanických soustav

Tlumicí prvky modelů vyjadřují disipaci energie soustavy. Při vytváření modelu z reálné soustavy lze uvažovat několik druhů tlumení. Tlumení probíhá buď na základě vnitřních fyzikálních principů daných materiálovými vlastnostmi anebo zvnějšku dané vazbami soustavy na okolí.

1.1.1 Přehled základních typů modelů tlumení

Ve všech zde zmíněných případech tlumicí síla působí proti směru pohybu tělesa.

- Viskozní
Jedná se o nejčastěji používaný model tlumení. Toto tlumení vyjadřuje procesy pohybu prvku v kontinuu [9], nejčastěji vzduchu. Tlumicí síla působící na daný prvek je přímo úměrná rychlosti prvku.
- Hysterezní
Hysterezní tlumení má oproti viskoznímu fyzikální podstatu uvnitř materiálu [9]. Způsobuje jej posuv jednotlivých rovin materiálu prvku po sobě. Tlumicí síla závisí přímo úměrně na rychlosti prvku a nepřímo na úhlové rychlosti kmitání.
- Coulombovo
Tlumení soustavy vychází z tření, tlumicí síla je tedy konstatní a daná součinitelem tření styčných ploch prvků [9].
- Odpor prostředí
Fyzikální podstata odporu prostředí je stejná jako u viskozního tlumení, nicméně se tento model používá u vysokých rychlostí vibrací v kombinaci s velkými výchylkami nebo vyšší hustotou kontinua [9]. Velikost odporové síly je definována Newtonovým zákonem odporu, kdy je odporová síla přímo úměrná druhé mocnině rychlosti tělesa.

1.1.2 Proporcionální tlumení

Pro zjednodušení numerických výpočtů lze matici tlumení viskozně tlumených soustav \mathbf{B} (definice dále) odhadnout jako proporční součet matic hmotnosti a tuhosti.

$$\mathbf{B} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (1.1)$$

Koeficienty α a β jsou tzv. Rayleighovy koeficienty tlumení a určují se měřením [10]. **Hodnotu tlumení reálných soustav nelze zjistit jinak než měřením.**

1.2 Řešení soustav s více stupni volnosti

Tato kapitola stručně shrnuje analytický postup řešení soustav s více stupni volnosti. Řešení ve vší obecnosti je příliš složité a tak bylo použito několik (v textu uvedených) zjednodušení. Přesto bylo snahou poskytnout co nejobecnější postup, který je pro danou problematiku relevantní.

1.2.1 Poměrný útlum

Dříve než dojde na popis řešení soustav je vhodné představit jednu z veličin, která vyjadřuje míru tlumení soustavy. Onou veličinou je poměrný útlum b_r . Matematické vyjádření veličiny lze nalézt v další sekci, zde se jedná pouze o představení pro potřeby zavedení jednoho z předpokladů řešení.

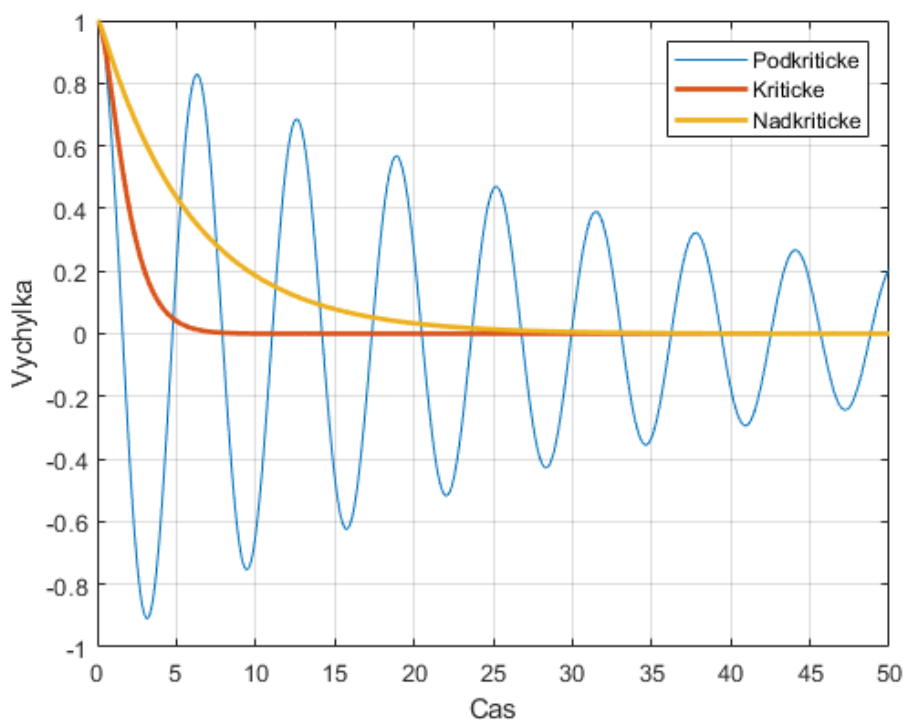
Poměrný útlum je bezrozměrná veličina nabývající nuly nebo kladných hodnot. Významnými hodnotami je právě nula a číslo jedna.

Popis hodnot poměrného útlumu u volného kmitání [2]

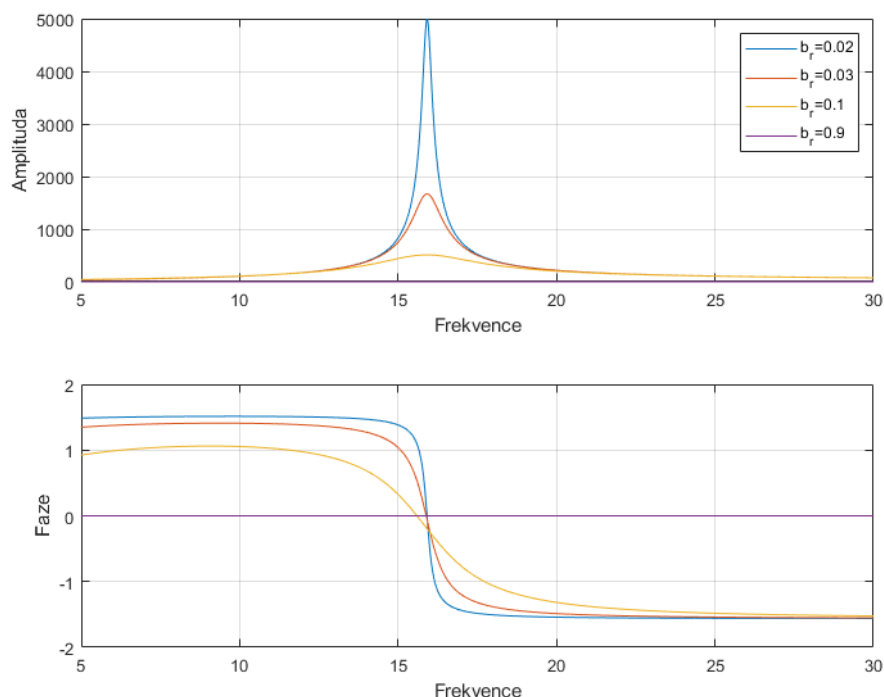
- $\{0\}$
Soustava není tlumená a kmitá periodickým pohybem okolo rovnovážné polohy.
- $(0, 1)$ – Podkritické tlumení
Soustava kmitá periodickým pohybem okolo rovnovážné polohy a maximální výchylka periody se v čase zmenšuje.
- $\{1\}$ – Kritické tlumení
Soustava nekmitá. Ze všech hodnot b_r se z počátečních podmínek soustava zastaví v rovnovážné poloze v nejkratším čase právě pro hodnotu $b_r = 1$.
- $(1, \infty)$ – Nadkritické tlumení
Soustava nekmitá.

Příklad odezvy tlumené soustavy s jedním stupněm volnosti je zobrazen na Obr. 1.1. Amplitudo-frekvenční charakteristika pro různé hodnoty útlumu je zobrazena na Obr. 1.2.

Řešení v následující části probíhá pro předpoklad podkritického tlumení.



Obr. 1.1: Odezva soustavy v závislosti na tlumení



Obr. 1.2: Amplitudo-frekvenční charakteristika v závislosti na tlumení

1.2.2 Soustava s více stupni volnosti

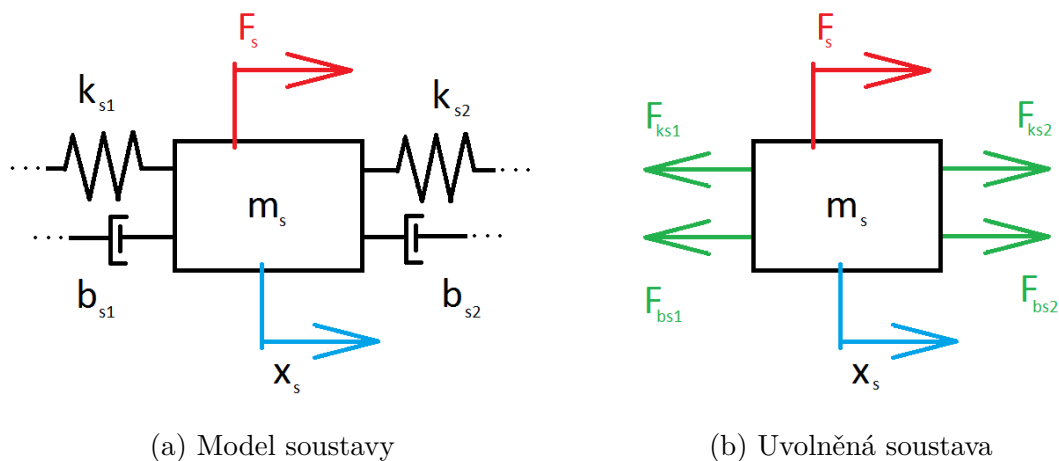
Následující řešení pracuje s modelem soustavy konající translační pohyb. Zcela analogicky by řešení probíhalo, pokud by byl zvolen pohyb rotační. Odvození vychází z 2. Newtonova pohybového zákona:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{ext} &= m\mathbf{a} \\ \mathbf{M}_{ext} &= I\boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Kde \mathbf{F}_{ext} je výsledný vektor externích sil působících na těleso, \mathbf{a} vektor zrychlení tělesa, \mathbf{M} výsledný vektor externích momentů sil působících na těleso a $\boldsymbol{\alpha}$ vektor úhlového zrychlení tělesa. Skalárními veličinami jsou zde hmotnost m a moment setrvačnosti tělesa I .

Mějme model soustavy s p stupni volnosti ve tvaru jednotlivých hmot m_j spojených navzájem kombinací libovolného počtu pružin o tuhosti k_j a tlumičů o koeficientu tlumení b_j dle Obr.1.3a. Na jednotlivé hmoty jsou aplikovány budící silové účinky F_j . Každá z hmot koná translační pohyb po modální souřadnici x_j . Pro každou reálnou soustavu lze tento model sestavit na různé úrovni zjednodušení.

Uvolněná soustava je zobrazena na Obr.1.3b.



Obr. 1.3

Jednotlivé síly F_{bj} a F_{kj} lze za předpokladu viskozního tlumení soustavy a lineárních pružin nahradit vztahy:

$$\begin{aligned} F_b &= b\dot{x} \\ F_k &= kx \end{aligned} \quad (1.3)$$

Takto upravenou soustavu lze zapsat maticově jako diferenciální rovnici 2. řádu:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (1.4)$$

Kde \mathbf{M} je matice hmotnosti, \mathbf{B} matice tlumení, \mathbf{K} matice tuhosti, \mathbf{f} je vektor budících sil a \mathbf{x} vektor modálních souřadnic. Rozměry matic jsou $p \times p$ a rozměry vektorů $p \times 1$.

Jelikož má rovnice pravou stranu – je nehomogenní, její řešení má homogenní a nehomogenní část. Homogenní řešení odpovídá volnému kmitání a nehomogenní zase nucenému.

1.2.3 Homogenní řešení – volné kmitání

Homogenní řešení rovnice 1.4 je hledáno ve tvaru:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}e^{\lambda t} \quad (1.5)$$

Substitucí předpokládaného řešení přejde rovnice na tvar 1.6 a tím řešení vede na problém hledání vlastních čísel.

$$(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{B}\lambda + \mathbf{K})\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (1.6)$$

Hledání vlastních čísel probíhá převedením na rozšířenou matici soustavy zavedením substitute:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= \mathbf{x} \\ \mathbf{q}_2 &= \dot{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Tím dojde ke snížení řádu rovnice o jeden stupeň a rovnice 1.4 bez pravé strany přejde do tvaru:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Kde \mathbf{A} je matice v blokovém tvaru o rozměru $2p \times 2p$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Matice \mathbf{E} je jednotková matice.

Řešením vlastního problému je p vlastních čísel λ_n a p komplexně sdružených vlastních čísel $\overline{\lambda_n}$. Zároveň se řešením získá p vlastních vektorů \mathbf{v}_n a p komplexně sdružených vlastních vektorů $\overline{\mathbf{v}_n}$. Vektory \mathbf{v}_n nejsou vlastními vektory (tvary) kmitající soustavy, ale vlastními vektory matice \mathbf{A} . Nicméně s vlastními vektory soustavy Φ_n jsou svázány vztahem [2]:

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} \Phi_n \\ \lambda_n \Phi_n \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Každá vlastní hodnota λ_n spolu s odpovídajícím vlastním vektorem Φ_n (včetně sdružených hodnot) ve tvaru rovnice 1.5 tvoří jedno z homogenních řešení soustavy 1.4.

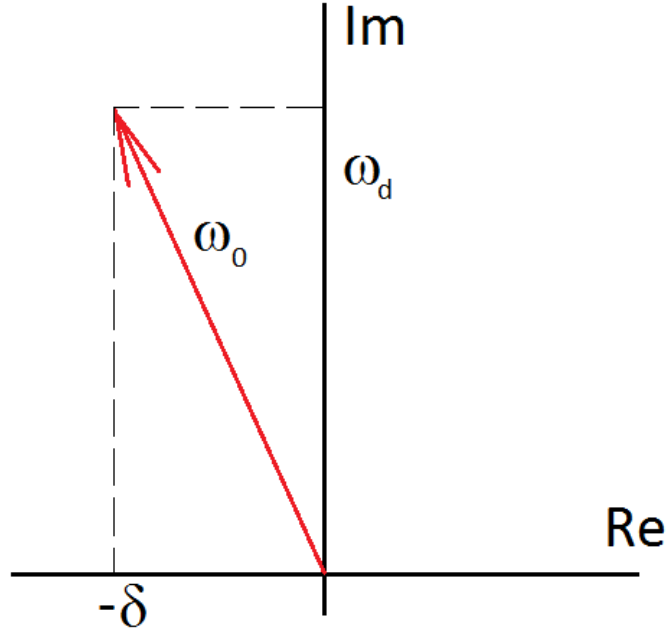
Vlastní hodnoty jsou přímo vlastní frekvence soustavy a skrývají v sobě informaci o tlumené vlastní frekvenci ω_d , velikosti netlumené vlastní frekvence $|\omega_0|$ a samotném tlumení soustavy pomocí hodnoty součinitele doznívání δ . Graficky to zobrazuje Obr.1.4.

$$\lambda_n = \omega_{0n} = -\delta_n + i\omega_{dn} \quad (1.11)$$

Homogenním řešením rovnice 1.4 je lineární kombinace jednotlivých řešení (bází) daných všemi vlastními hodnotami a vektory (tzv. fundamentální systém). Pokud by nebyl dán předpoklad podkritického útlumu, bázové funkce jsou složitější a bylo by třeba využít principu řešení pomocí exponenciály matice popsané například v [11].

$$\mathbf{x}_h(t) = \sum_{j=1}^{2p} c_j \Phi_j e^{\lambda_j t} \quad (1.12)$$

Konstanty c_j lze určit po zadání počátečních podmínek k pohybové rovnici.



Obr. 1.4: Vyjádření vlastního čísla v komplexní rovině

Jedno konkrétní řešení pro jeden prvek soustavy je uvedeno v rovnici níže. Toto řešení lze rozdělit na část pro útlum a část pro harmonický pohyb. Fyzikální význam má pouze reálná složka. Vše je ilustrováno na Obr.1.5.

$$\begin{aligned}
 x &= e^{(-\delta + i\omega_d)t} \\
 &= e^{-\delta t} (\cos(\omega_d t) + i \sin(\omega_d t)) \\
 &\stackrel{\text{fyzikálně}}{=} e^{-\delta t} \cos(\omega_d t)
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Přenásobením jednotlivých matic z rovnice 1.4 z obou stran vlastním vektorem Φ_n a komplexně sdruženým $\overline{\Phi_n}$ se získají modální veličiny – modální hmotnost, modální tlumení a modální tuhost pro tvar s pořadovým číslem n a vlastní frekvencí ω_n [2].

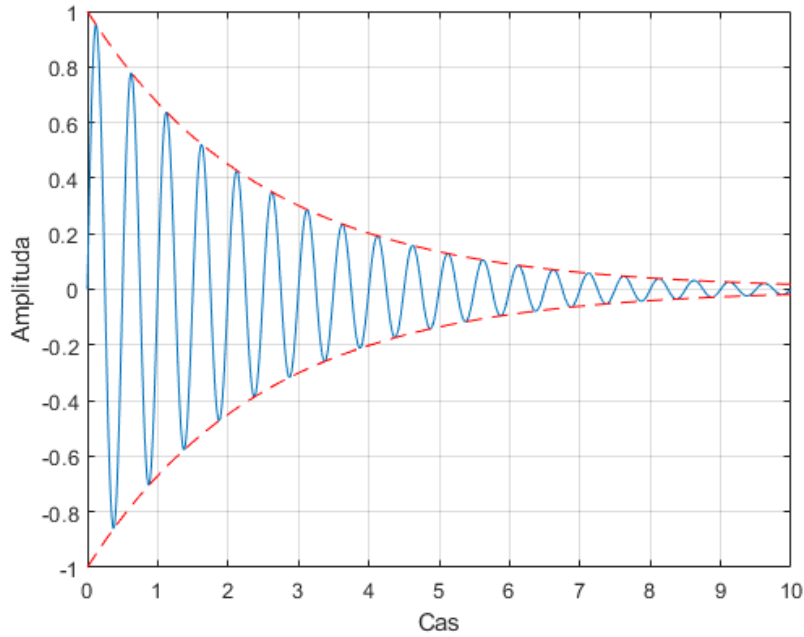
$$\begin{aligned}
 \overline{\Phi_n}^T M \Phi_n &= m_n \\
 \overline{\Phi_n}^T B \Phi_n &= b_n \\
 \overline{\Phi_n}^T K \Phi_n &= k_n
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Na základě těchto hodnot lze získat poměrný útlum b_r soustavy pro vlastní tvar n z rovnice 1.15:

$$b_{rn} = \frac{b_n}{2\sqrt{k_n m_n}} \tag{1.15}$$

Zároveň lze definovat ω_d – tlumenou vlastní frekvenci pro tvar n :

$$\omega_{dn} = \omega_{0n} \sqrt{1 - b_{rn}^2} \tag{1.16}$$



Obr. 1.5: Příklad odezvy tlumené soustavy

Součinitel doznívání δ je s poměrným útlumem b_r svázán vztahem:

$$\delta_n = b_{rn}\omega_{0n} \quad (1.17)$$

1.2.4 Nehomogenní řešení — nucené kmitání

Jelikož lze rozložit libovolnou spojitou funkci na součet funkcí harmonických (Fourierův rozvoj), bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že soustava je buzena harmonickou silou:

$$\mathbf{f} = \mathbf{F}e^{i\Omega t} \quad (1.18)$$

Řešení pro jakékoliv jiné buzení bude dáno součtem jednotlivých partikulárních řešení.

K nalezení řešení by se dala použít metoda variace konstant, nicméně se jedná o speciální pravou stranu, a tak lze dojít k výsledku snadněji:

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}\sum_{j=1}^{2p}\frac{1}{i\Omega - \lambda_j}e^{i\Omega t} \quad (1.19)$$

Z řešení je zřejmé, že pokud se bude Ω blížit libovolné tlumené vlastní frekvenci ω_d , pak výchylka poroste a bude docházet k rezonanci. To, že výchylka neporoste nade všechny meze, zajistí tlumení soustavy (viz Obr.1.2 na str. 24).

1.2.5 Logaritmický dekrement

Posledním parametrem charakterizujícím tlumení je logaritmický dekrement ν . Jelikož do vlastního řešení nezasahoval, ale je ho využíváno dále v provozní modální analýze, je zmiňován až zde.

Logaritmický dekrement je definován pro odezvu bázové funkce jako přirozený logaritmus poměru po sobě jdoucích výchylek přičemž časový posun mezi výchylkami je roven jedné periodě [9]:

$$\nu = \ln \left(\frac{x(t)}{x(t+T)} \right) \quad (1.20)$$

Pro jinou než bázovou odezvu nemá smysl jej definovat, protože poté je odezva dána lineární kombinací několika bázových funkcí a obálka odezvy pak již nemá tvar exponenciální funkce.

Po dosažení předpisu odezvy a úpravě lze získat vztah:

$$\nu = \delta T \quad (1.21)$$

Pro případ výběru maximálních amplitud a to jak kladných, tak záporných ("špičky" a "údolí") lze odvodit vztah:

$$\nu = \frac{2}{k} \ln \left| \frac{r_0}{r_k} \right| \quad (1.22)$$

Kde r_0 je počáteční maximální výchylka a r_k je v pořadí k . maximální výchylka. Přepočtový vztah mezi poměrným útlumem a logaritmickým dekrementem je [6]:

$$b_r = \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 + 4\pi^2}} \quad (1.23)$$

2 Experimentální modální analýza

Experimentální modální analýza využívá k získávání modálních veličin FRF (Frekvenční přenosová funkce – Frequency Response Function) $\mathbf{H}(\omega)$ [12]. Jedná se o komplexní veličinu a její absolutní hodnota udává "zesílení" jednotlivých frekvencí. Je definována jako poměr mezi výstupem a vstupem:

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{\mathbf{X}(\omega)}{\mathbf{F}(\omega)} \quad (2.1)$$

FRF rovněž propojuje PSD (Plošná výkonová hustota – Power Spectral Density) budícího $G_{xx}(\omega)$ a výstupního $G_{yy}(\omega)$ signálu [6]:

$$\mathbf{G}_{yy}(\omega) = \overline{\mathbf{H}(\omega)}^T \mathbf{G}_{xx}(\omega) \mathbf{H}(\omega) \quad (2.2)$$

Při znalosti vlastních čísel může být definována jako suma dílčích příspěvků od jednotlivých vlastních tvarů [12]:

$$\mathbf{H}(\omega) = \sum_{n=1}^p \frac{A_n}{\omega_{0n} - \omega} \quad (2.3)$$

Kde A_n je modální konstanta nebo tzv. reziduum.

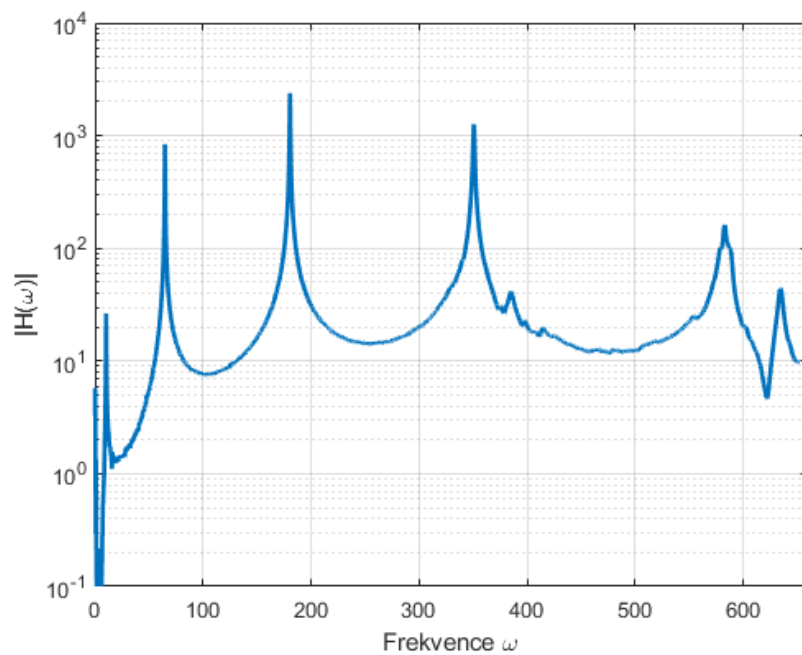
Na Obr.2.1 je zobrazen příklad průběhu absolutní hodnoty $\mathbf{H}(\omega)$ a vykreslení průběhu $\mathbf{H}(\omega)$ v komplexní rovině.

2.1 SDOF metody analýzy

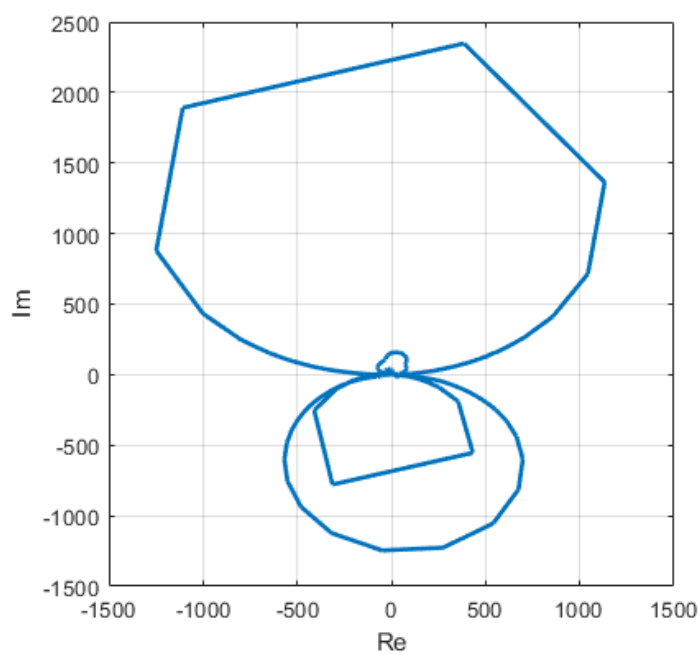
SDOF (Jeden stupeň volnosti – Single Degree of Freedom) typy vyhodnocování dat patří mezi nejzákladnější přístupy a přestože mají své limity jako například časová náročnost zpracování dat nebo kladené silné předpoklady, pro svou názornost a jednoduchost by mělo být používání těchto metod v repertoáru schopností každého inženýra zabývajícího se měřením.

Přestože název naznačuje, že by se mohlo jednat pouze o použití na soustavách o jednom stupni volnosti, není tomu tak. Principem je vyhodnocování modálních vlastností separátně pro každý vlastní tvar [12]. Což sebou nese své nevýhody, především pokud jsou vlastní frekvence příliš blízko sebe. A z toho vyplývá požadavek, aby v každé vlastní frekvenci byl příspěvek do $\mathbf{H}(\omega)$ od ostatních vlastních tvarů zanedbatelný, tj. aby rovnice 2.3 měla pouze jeden člen.

Pro vyhodnocování dat této práce se použití SDOF metody ukázalo jako dostačující.

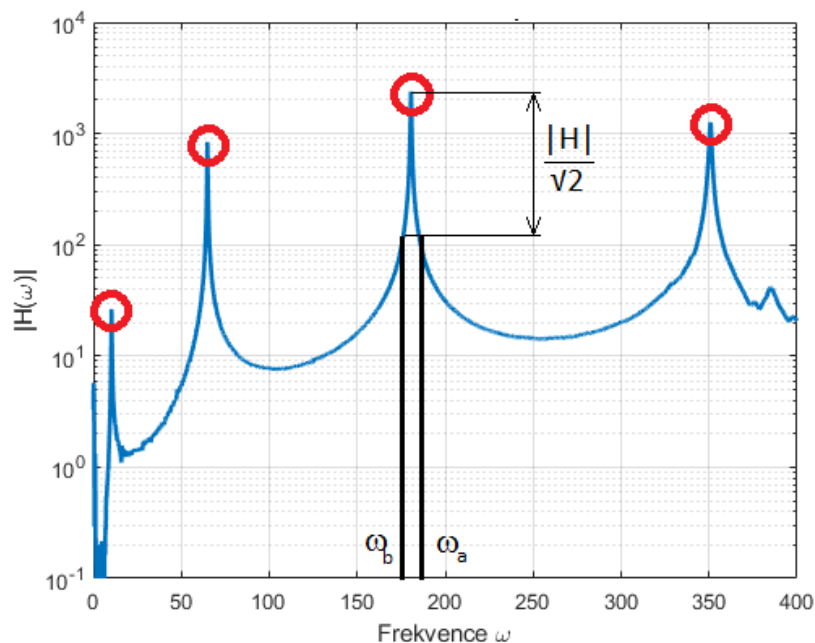


(a) $|\mathbf{H}|$ v závislosti na úhlové frekvenci ω



(b) \mathbf{H} v komplexní rovině

Obr. 2.1



Obr. 2.2: Peak picking

2.1.1 Peak picking

Jedná se o nejjednodušší metodu spočívající v analýze absolutní hodnoty FRF. Nejdříve jsou vybrány lokální maxima $|H(\omega)|$ a ty jsou následně označeny jako vlastní frekvence ω_n [12]. Poté v okolí každé vlastní frekvence je vytyčeno pásmo s amplitudou funkce větší než $\frac{|H(\omega_n)|}{\sqrt{2}}$ a krajní body jsou označeny jako frekvence polovičního výkonu ω_a a ω_b .

Tlumení vlastního tvaru je dáno vztahem [12]:

$$b_{rn} = \frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{2\omega_n^2} \cong \frac{\omega_a - \omega_b}{\omega_n} \quad (2.4)$$

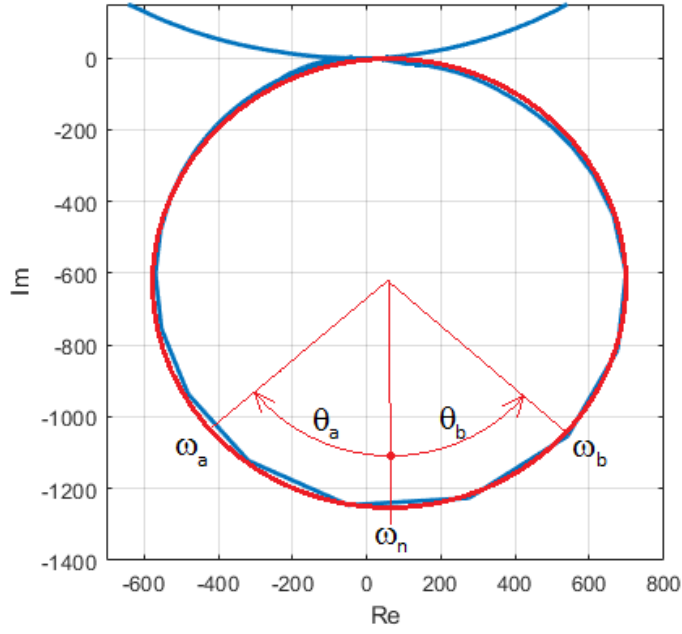
Dále lze určit hodnotu modální konstanty A_n v rovnici 2.3:

$$A_n = |H_{\omega_n}| \omega_n^2 b_{rn} \quad (2.5)$$

Graficky je postup zobrazen na Obr. 2.2

Nevýhodou metody je nedostatek změřených frekvencí v okolí rezonance, kdy odezva vzrůstá a hodnota $\frac{|H(\omega_n)|}{\sqrt{2}}$ se nemusí trefit přímo do změřené frekvence, což je zdrojem nepřesností. Tuto nevýhodu lze potlačit fitováním křivky v okolí rezonance.

Vážnější nevýhodou a zároveň důvodem, proč je více používána následující zmíněná metoda je, že není vždy zcela splněn předpoklad navzájem se neovlivňujících tvarů [12].



Obr. 2.3: Circle fit

2.1.2 Circle fit

Princip této metody je zjednodušeně ve fitování $\mathbf{H}(\omega)$ v komplexní rovině kružnicí [12]. Na základě vlastností kružnice jsou poté určeny modální parametry. Vše ilustruje Obr.2.3.

Vlastní frekvencí ω_n je hodnota frekvence nejvzdálenějšího bodu kružnice od reálné osy. Dále lze odvodit vztah pro poměrný útlum [12]:

$$b_{rn} = \frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{\omega_n^2 \left(\tan\left(\frac{\theta_a}{2}\right) + \tan\left(\frac{\theta_b}{2}\right) \right)} \quad (2.6)$$

Rovnice přejde při volbě $\theta_a = \theta_b = \frac{\pi}{2}$ (frekvence polovičního výkonu) do tvaru:

$$b_{rn} = \frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{2\omega_n^2} \cong \frac{\omega_a - \omega_b}{\omega_n} \quad (2.7)$$

Z průměru kružnice D_n lze určit modální konstatnu A_n [12]:

$$A_n = D_n \omega_n^2 b_{rn} \quad (2.8)$$

3 Provozní modální analýza

Provozní modální analýza je, jak již bylo zmíněno v úvodu, ta část modální analýzy, která nepotřebuje znát přesné buzení soustavy k určování modálních parametrů, ale vystačí si pouze s požadavky na buzení.

Pro buzení soustav se využívá náhodných procesů v okolí, které soustavu rozkmitávají. Jako příklad buzení může být vítr obtékající vysoké budovy a mosty nebo okolní dopravou způsobené otřesy budov. Primárně byla analýza používána ve stavebním inženýrství, jak již plyne z příkladů výše, ale v posledních letech se začíná uplatňovat i ve strojním inženýrství, kdy lze měřit vibrace citlivých strojů, větrem obtékané lopatky větrných elektráren atp. Fakt, že jsou pro analýzu vhodné procesy vyskytující se běžně v okolí soustav sebou nese ty největší výhody metod – měření lze realizovat za provozu soustavy, z čehož plyne i rychlost a nízká cena měření [2]. Zároveň se dají měřit soustavy, které by konvenčním způsobem nebylo možné rozkmitat. Oproti tomu limitacemi analýzy jsou menší přesnost v porovnání s EMA a také nižší úroveň odezvy měřené soustavy.

3.1 Frequency domain decomposition

3.1.1 Předpoklady použití FDD

Na soustavy metoda FDD (Dekompozice ve frekvenční oblasti – Frequency Domain Decomposition) klade několik požadavků [2]. Pokud jsou požadavky splněny, metoda dává přesné výsledky. Pokud je každý z předpokladů splněn jen z části, metoda stále poskytuje relativně přesné výsledky a existují i postupy, které nesplnění předpokladů korigují. Například může být New-EFDD metoda popsána v [7], která upravuje hned první níže zmíněný předpoklad.

- Buzení soustavy přibližně odpovídá bílému šumu
- Modální souřadnice jsou navzájem nezávislé
- Soustava je lehce tlumená

Požadavek na bílý šum vychází z rovnice 2.2. Pokud je budícím signálem bílý šum, jeho PSD je konstantní a PSD odezvy soustavy je dáno pouze FRF soustavy:

$$\mathbf{G}_{yy}(\omega) = \overline{\mathbf{H}(\omega)}^T \mathbf{G}_{xx}(\omega) \mathbf{H}(\omega) = k \overline{\mathbf{H}(\omega)}^T \mathbf{H}(\omega) \quad (3.1)$$

3.1.2 Princip

Hlavním nástrojem metody je SVD (Singulární rozklad – Singular Value Decomposition). Ale aby bylo co rozkládat, tak je třeba nejdříve určit PSD změřených hodnot.

n snímači je měřeno zrychlení v n bodech soustavy a následně určena matice spektrálních hodnot například pomocí Welchova algoritmu [13]:

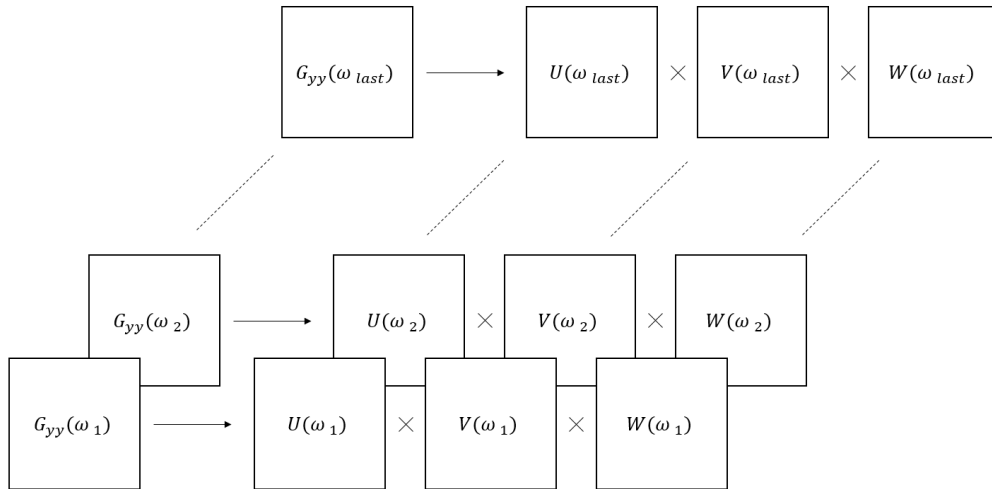
$$\mathbf{G}_{yy}(\omega) = \begin{pmatrix} PSD_{11}(\omega) & CSD_{12}(\omega) & \dots & CSD_{1n}(\omega) \\ CSD_{21}(\omega) & PSD_{22}(\omega) & \dots & CSD_{2n}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CSD_{n1}(\omega) & CSD_{n2}(\omega) & \dots & PSD_{nn}(\omega) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$\mathbf{G}_{yy}(\omega)$ je čtvercová matice o rozměru $n \times n$. Na diagonále se nachází hodnoty plošné výkonové hustoty hodnot z jednotlivých snímačů a mimo ní hodnoty křížové výkonové hustoty. Matice je funkcí frekvence. Frekvence nabývá hodnot od nuly do Nyquistovy frekvence, tj. poloviny vzorkovací frekvence. Počet dělení je dán způsobem určení $\mathbf{G}_{yy}(\omega)$.

Pro každou frekvenci se určí SVD, čímž se získají 3 další matice.

$$\mathbf{G}_{yy}(\omega) = \mathbf{U}\mathbf{V}\mathbf{W} \quad (3.3)$$

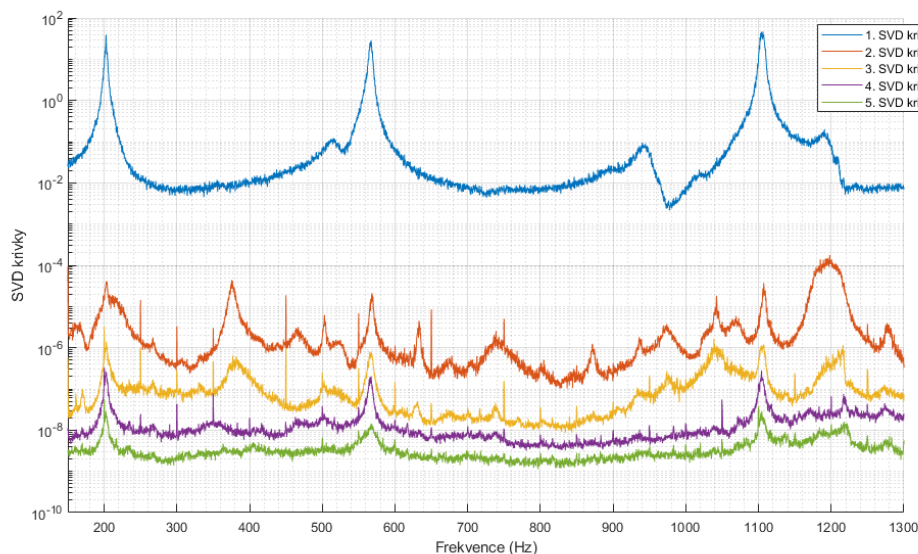
Vektory \mathbf{U} odpovídají vlastním vektorům matice a lze je interpretovat i jako vlastní tvary soustavy [1] a matice \mathbf{V} obsahuje vlastní hodnoty (pozor – vlastní hodnoty matice $\mathbf{G}_{yy}(\omega)$, ne vlastní hodnoty kmitající soustavy). Matice \mathbf{W} není pro tento problém relevantní. Postup graficky ilustruje Obr. 3.1.



Obr. 3.1: Grafické znázornění zpracování $\mathbf{G}_{yy}(\omega)$

Ze všech matic $\mathbf{V}(\omega)$ jsou vykresleny průběhy velikostí vlastních hodnot v závislosti na ω . Tím jsou získány tzv. SVD křivky – 1. SVD křivka odpovídá nejvyšším vlastním hodnotám z matic, 2. druhé nejvyšší atd.

Počet křivek odpovídá počtu použitých snímačů při měření. Typický vzhled grafu SVD křivek je zobrazen na Obr. 3.2. Křivky na obrázku byly vykresleny na základě dat z [1].



Obr. 3.2: SVD křivky soustavy

První SVD křivka je nejvýraznější a její špičky/lokální extrémy označují frekvence podezřelé z vlastních (tlumených) frekvencí kmitající soustavy. Ukazatelem, zda se jedná o vlastní frekvence nebo se do měřeného signálu propsala jiná periodická budící odezva mimo bílého šumu, je druhá a další SVD křivky [2]. Pokud by byla soustava buzena krom bílého šumu i harmonickým buzením, ostatní SVD křivky vykazují extrémní nárůst na dané frekvenci oproti svému průměru všude jinde.

Pokud druhá SVD křivka vykazuje nárůst mezi blízkými špičkami první SVD křivky, pak to bývá ukazatelem, že pouze jedna ze špiček odpovídá vlastní frekvenci soustavy. Všechny tři možné případy ilustruje Obr. 3.3.

Situace **C** Obr.3.3 je příkladem, kdy nejsou splněny předpoklady zavedené na začátku kapitoly a přesto výsledky ve větší vzdálenosti od **C** jsou platné.

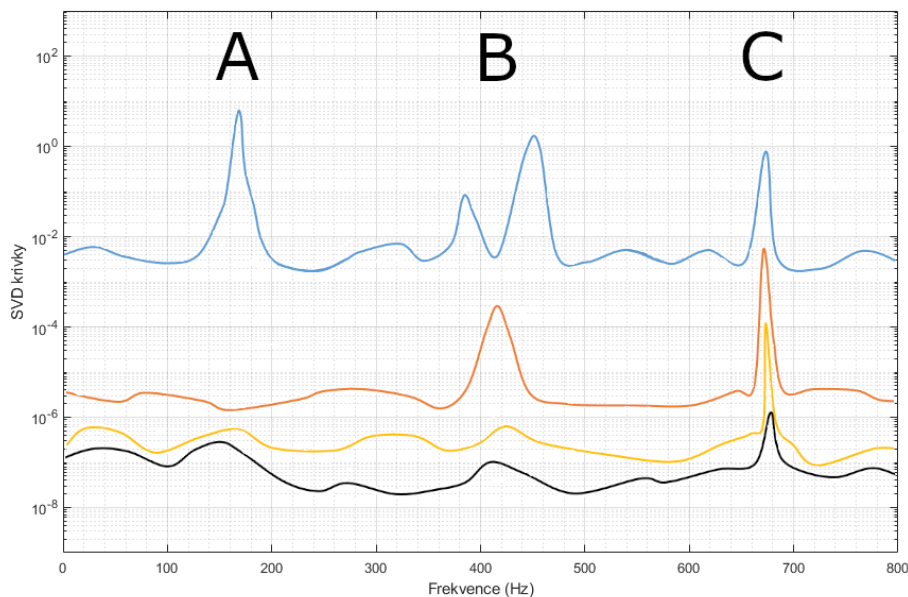
Ke zjištění, zda se opravdu jedná o vlastní frekvence se používá algoritmus MAC (Kritérium modální věrnosti – Modal Assurance Criterion) – viz dále.

Určené vlastní tvary Ψ_n z matic $U(\omega)$ se normují Euklidovskou normou, tj. aby platilo:

$$\sqrt{\Psi_n^T \Psi_n} = 1 \quad (3.4)$$

3.2 MAC

MAC (Kritérium modální věrnosti – Modal Assurance Criterion) algoritmus využívá faktu, že vlastní tvary jsou na sebe navzájem kolmé [2]. MAC nabývá hodnoty $\langle 0, 1 \rangle$ a v principu se jedná o druhou mocninu skalárního součinu vlastních vektorů,



Obr. 3.3:

A Pravděpodobná vlastní frekvence

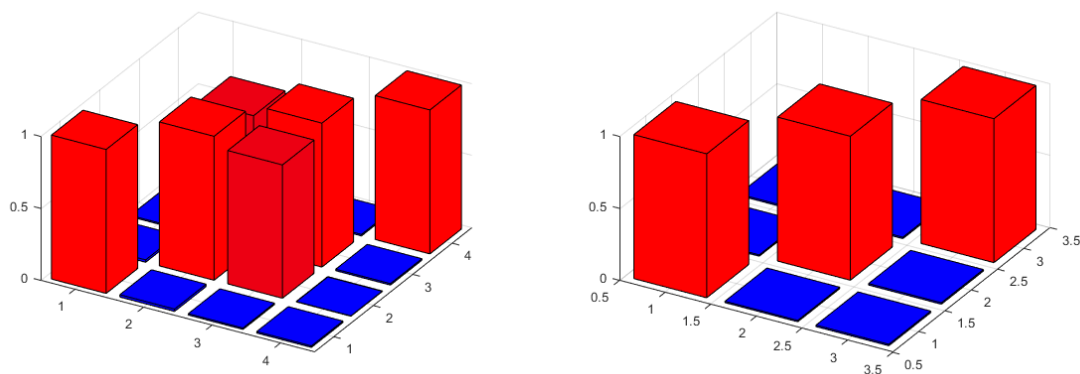
B Pravděpodobně pouze jedna ze špiček odpovídá vlastní frekvenci

C Do měřených dat se propsala nežádoucí frekvence

u kterých by díky jejich ortogonalitě měla být hodnota MAC rovna nule. Aby se daly výsledky navzájem porovnávat, všechny vlastní vektory musí být znormované.

$$\text{MAC} = \frac{|\overline{\Psi}_k^T \Psi_l|^2}{(\overline{\Psi}_k^T \Psi_k)(\overline{\Psi}_l^T \Psi_l)} \quad (3.5)$$

Je-li určena hodnota MAC pro všechny kombinace podezřelých vlastních vektorů, výsledkem je symetrická matice $p \times p$. Pokud vektory jsou vlastní, bude na diagonálních prvcích číslo jedna (skalární součin vektoru se sebou samým) a všude jinde by se měly hodnoty blížit nule. V opačném případě vektory nejsou ortogonální a pořadové číslo sloupce a řádku označuje, které konkrétně to jsou. Obr. 3.4 tuto skutečnost ilustruje – vlevo je matice s chybně označeným vlastním tvarem. Je zřejmé, že na sebe kolmé nejsou tvary č. 2 a 3. V pravo je ta samá soustava po vyřazení tvaru č. 2 a přechíslování.



Obr. 3.4: MAC matice

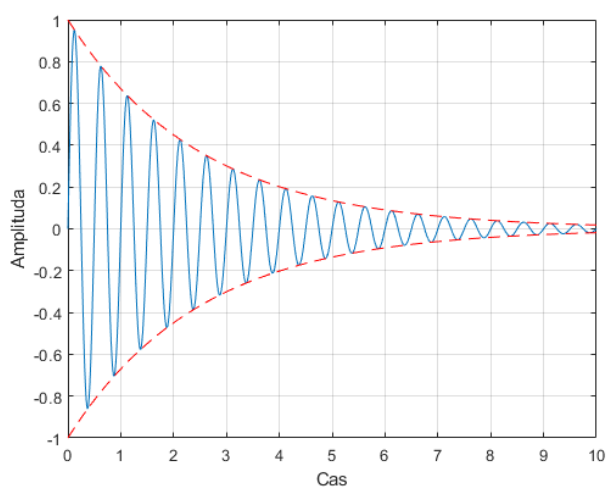
3.3 Enhanced Frequency Domain Decomposition

3.3.1 Princip

Metoda EFDD umožňuje navíc oproti FDD metodě určit ještě tlumení soustavy a tedy i netlumené vlastní frekvence [5]. Využívá opačným způsobem MAC algoritmus a IDFT (Zpětná diskétní Fourierova transformace – Inverse Discrete Fourier Transformation) pro návrat do časové domény. Tlumení je určeno výpočtem z logaritmického dekrementu.

3.3.2 Bell identification

Jak bylo zmíněno výše, tlumení se určí z logaritmického dekrementu. K tomu je však třeba získat odezvu podobnou tvaru na Obr. 3.5



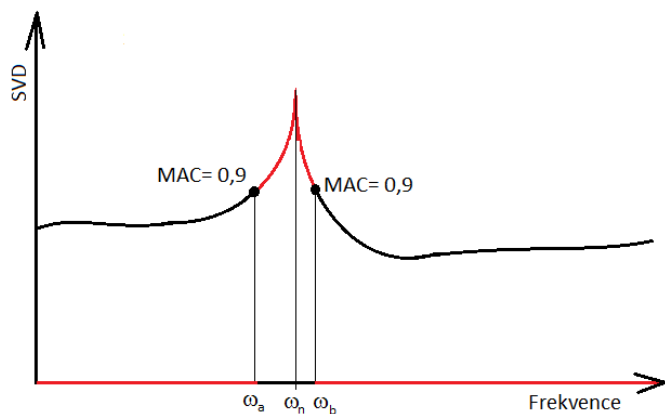
Obr. 3.5: Příklad odezvy tlumené soustavy

Jak takovou odezvu získat? Je třeba se vrátit k matici $\mathbf{G}_{yy}(\omega)$, resp. k jejím diagonálním hodnotám PSD.

Převodem do časové oblasti celého PSD se získá signál jako superpozice všech měřených frekvencí. Tato odezva je zcela nevyhovující. Při převodu zpět pouze jedné konkrétní vlastní hodnoty se získá harmonická, ale netlumená odezva soustavy. Nicméně při výběru i okolí vlastní frekvence se lze získat tlumenou odezvu soustavy. Právě šikmost PSD v okolí vlastní hodnoty je ukazatelem míry tlumení [12], viz Obr. 1.2.

Jak najít vhodné okolí, které poté transformovat zpět? Výběr probíhá algoritmem tzv. Bell Identification [6]. Vychází z faktu, že při obecné frekvenci, která není vlastní, je tvar dán superpozicí několika vlastních tvarů. Zde se opět uplatní hodnota MAC.

Pro vybranou vlastní frekvenci je hledáno okolí tak, že jsou pro okolní frekvence určovány tvary, jakými by soustava při dané frekvenci kmitala. Z daného tvaru a vlastního vektoru se poté určí hodnota MAC. Pokud je vyšší než zvolená hodnota, frekvence je vybrána pro zpětnou transformaci. Amplituda PSD nezařazených frekvencí je poté nahrazena nulovou hodnotou. Odborné články [6], [5] doporučují volit hodnotu filtrování MAC 0,9. Postup je graficky zobrazen na Obr. 3.6. Černá je původní funkce PSD, červeně jsou hodnoty do filtrování MAC algoritmem, které jdou následně do IDFT.



Obr. 3.6: Postup Bell Identification

Algoritmus se nedá použít pro "málo" vlastních tvarů (1-3), protože hodnota MAC klesá pomalu a do signálu se zpátky transformuje široké spektrum frekvencí.

3.3.3 IDFT

Následně dochází k převodu filtrovaných PSD hodnot na komplexní číslo ve tvaru:

$$z(\omega) = A(\omega)e^{i\phi(\omega)} \quad (3.6)$$

Amplituda $A(\omega)$ je s hodnotou PSD svázána vztahem [12]:

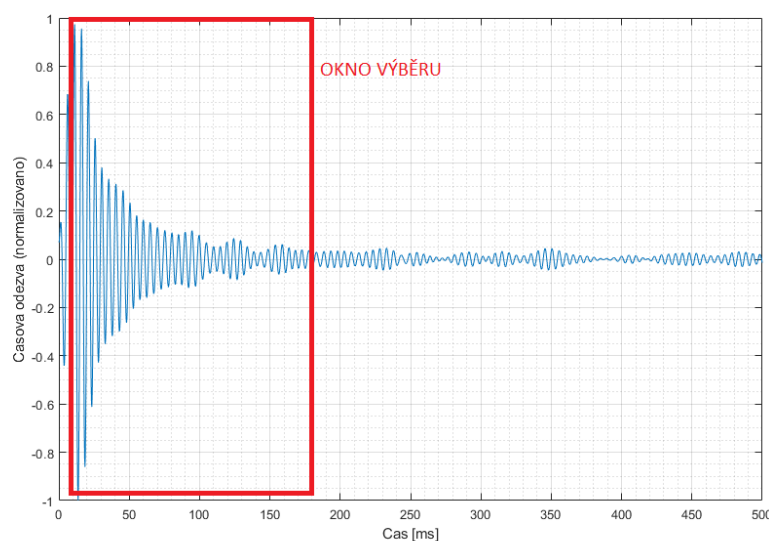
$$A(\omega) = \sqrt{PSD(\omega)} \quad (3.7)$$

Fázový úhel $\phi(\omega)$ je aproximován tak, aby při přechodu přes vlastní frekvenci došlo k otočení fáze kmitání.

Komplexní číslo je následně převedeno pomocí IDFT zpět do časové oblasti.

3.3.4 Stanovení tlumení

Pro určení tlumení nelze použít zpětně transformovaný signál v celé délce, ale je třeba vybrat okno, ve kterém se bude tlumení určovat [7]. Výběr okna ilustruje Obr. 3.7. Správný výběr okna je klíčový pro celý průběh určování tlumení [13].

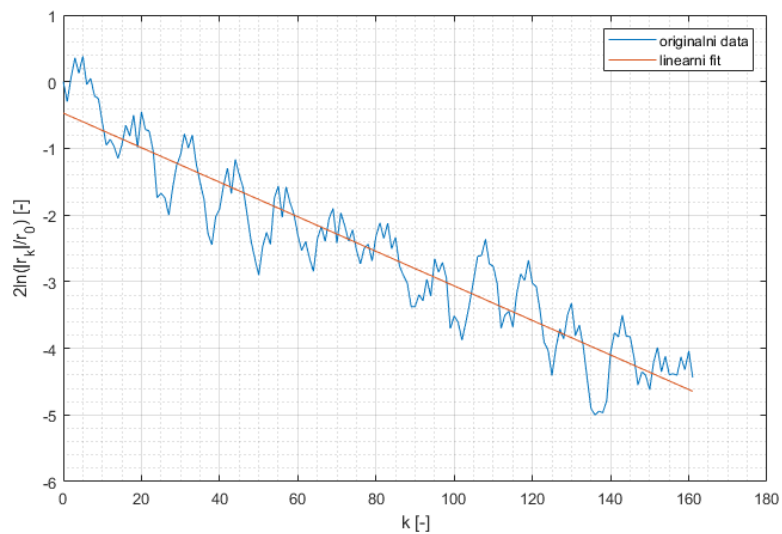


Obr. 3.7: Odezva v časové oblasti a výběr vhodného okna

Rovnici 1.22 lze přepsat do nového tvaru:

$$2(\ln|r_k| - \ln|r_0|) = -\nu k \quad (3.8)$$

Následně je vykreslen graf, kde na svislé ose je zobrazena levá strana rovnice 3.8 a na vodorovné ose pravá strana rovnice. V ideálním případě se jedná o lineární závislost procházející počátkem (Obr. 3.8).



Obr. 3.8: Vykreslené hodnoty dle rovnice 3.8 a jejich fit

Graf je fitován lineární funkcí a směrnice pak udává záporně vzatou hodnotu logaritmického dekrementu ν . Tento způsob umožňuje kontrolu, zda bylo vybráno správné okno (při výběru špatného okna křivka nemá lineární trend) oproti fitování obálky signálu funkcí:

$$x = Ke^{-\delta t} \quad (3.9)$$

Poměrný útlum a netlumená vlastní frekvence jsou dány rovnicemi 1.23 a 1.16.

4 Úvod do praktické části

V této části je rozebírána a ověřována funkčnost vytvořeného MATLAB skriptu. Nejdříve je představen zmíněný skript a uvedeny praktické poznámky k funkci algoritmu, způsoby implementace teoretických přístupů atp. Poté je skript testován na modelové soustavě, u které je známé předem dané tlumení a EFDD skript jej následně z odezvy soustavy vyhodnocuje.

V dalším oddílu praktická část přechází k reálné soustavě. Pro vybranou strojní součást jsou analyzována data pomocí EMA a následně z OMA metod naprogramovaným skriptem a komerčním programem OMA Pulse.

Na závěr jsou jednotlivé výsledky srovnávány.

Pro vyhodnocování tlumení byly použity datové sady z [1], protože jejich správnost byla ověřena a autor tak má jistotu, že by neměly být zdrojem chyb.

5 Programové řešení – EFDD skript

Skript byl vytvořen podle teorie uvedené v kapitole *Provozní modální analýza*. Jako základ byl použit skript z [1], jenž umožňuje určit tlumené vlastní frekvence a vlastní tvary. Tento skript tak byl rozšířen z metody FDD na EFDD.

Tato část uvádí praktické poznámky k implementaci teorie do programového řešení.

5.1 Vstupní data

Skript má stejná vstupní data jako v [1], tj. měřené zrychlení strojní součásti v čase a vzorkovací frekvence měření.

5.2 Bell Identification

Mezní hodnota MAC byla nastavena na 0,9.

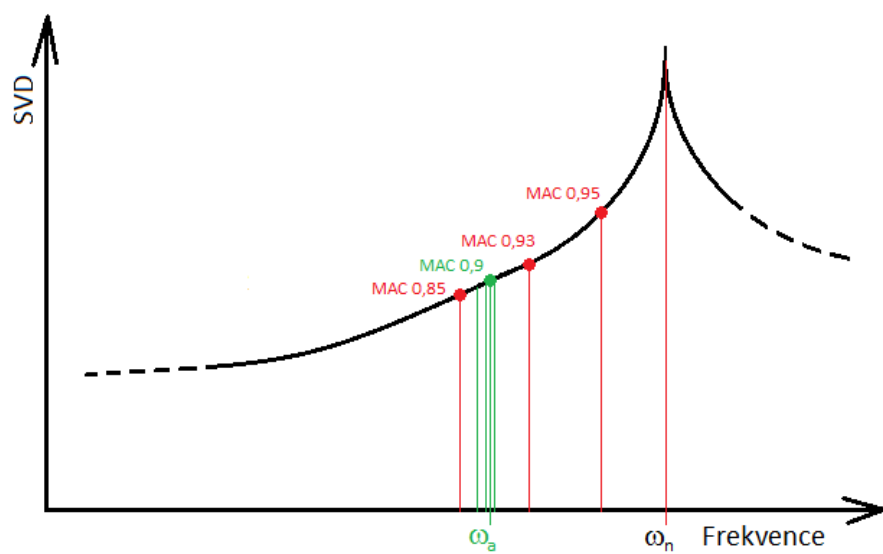
Tvary pro jednotlivé (ne-vlastní) frekvence jsou určovány stejným postupem jako v [1] určování vlastních tvarů.

Aby byl výpočet urychlen při výběru vhodného pásma pro zpětnou transformaci do časové oblasti, frekvence se posouvá od zvolené vlastní frekvence nejdříve s krokem $d = 100$ dílků rozlišení frekvence a po překročení nastavené hodnoty MAC meze je přesná hodnota hraniční frekvence určena metodou půlení intervalu. Postup je ilustrován na Obr.5.1.

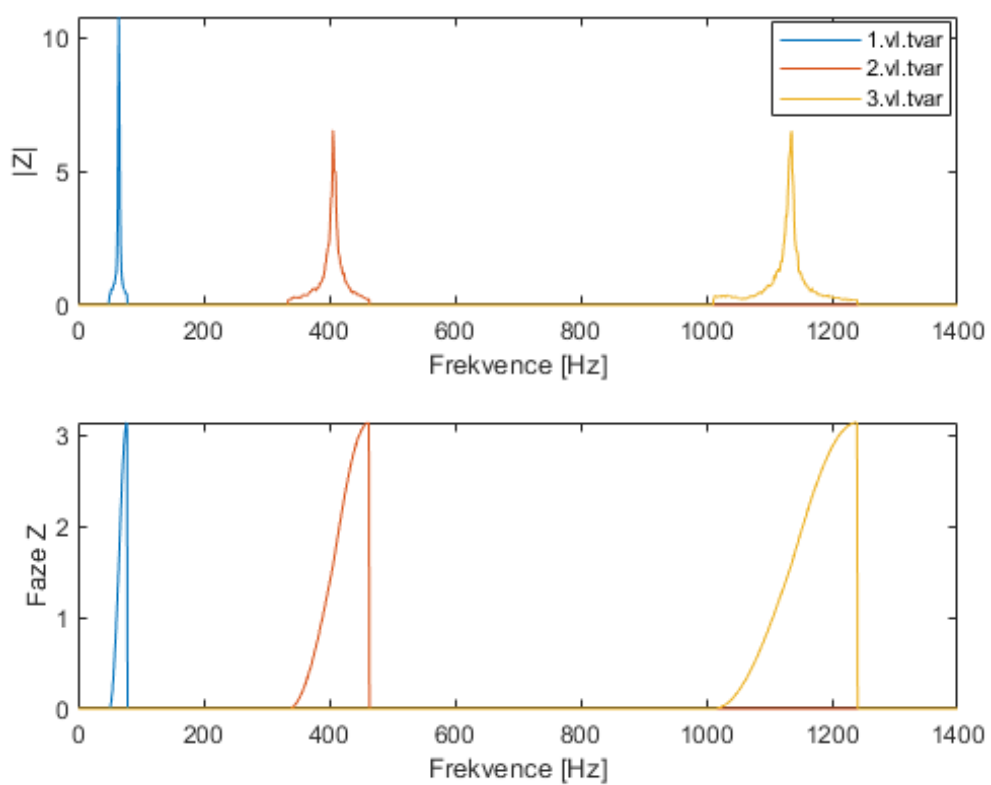
5.3 IDFT a rekonstrukce signálu

Pro všechny snímače z každého daného měření byla určena jedna průměrná hodnota PSD. Část PSD byla nahrazena nulovými hodnotami dle hranic z Bell Identification a vytvořený vektor převeden na vektor komplexních čísel pro každý vlastní tvar. Změna fáze komplexních čísel při přechodu přes vlastní frekvence byla aproximována funkcí sinus tak, aby změna byla pozvolná, viz Obr. 5.2.

Následně byly hodnoty zrcadleny a aplikován algoritmus IFFT (Zpětná rychlá Fourierova transformace – Inverse Fast Fourier Transformation), který data převedl do časové oblasti.



Obr. 5.1: Postup výběru hraniční frekvence



Obr. 5.2: Vektory komplexních čísel pro jednotlivé tvary

5.4 Výběr okna a logaritmický dekrement

Uživatel vybírá okno pro všechny vlastní tvary ze všech měření zvlášť. Defaultně je nastavena délka časové osy dle počtu prvků IDFT, ale rozsah lze změnit.

Po výběru okna, jenž probíhá z absolutních hodnot časové odezvy, je vykreslena závislost dle rovnice 3.8 a uživatel je dotázán, zda je spokojen s výběrem okna. Okno lze tedy změnit.

Logaritmické dekrementy jsou spočteny pro všechny vlastní tvary ze všech měření a následně jsou přepočteny na poměrné útlumy.

5.5 Statistické zpracování dat

Pro každý vlastní tvar je určených tolik hodnot poměrného útlumu, kolik bylo měření. Z těchto hodnot jsou nejdříve vyloučeny hrubé chyby pomocí principu 2σ . Původně byla nastavena hodnota 3σ , ale testováním skriptu bylo zjištěno, že toto kritérium je příliš benevolentní.

Vzhledem k tomu, že tlumení kovových konstrukcí nepřesahuje 5 %, je zapnuta volitelná možnost neuvažovat při statistickém zpracování hodnoty převyšující tuto mez. Nicméně při testování soustav s tlumícími prvky jako např. silentbloky je nutné tuto možnost vypnout.

Z takto vyfiltrovaných hodnot je vypočten pro každý vlastní tvar aritmetický průměr poměrného útlumu.

5.6 Výstupní data

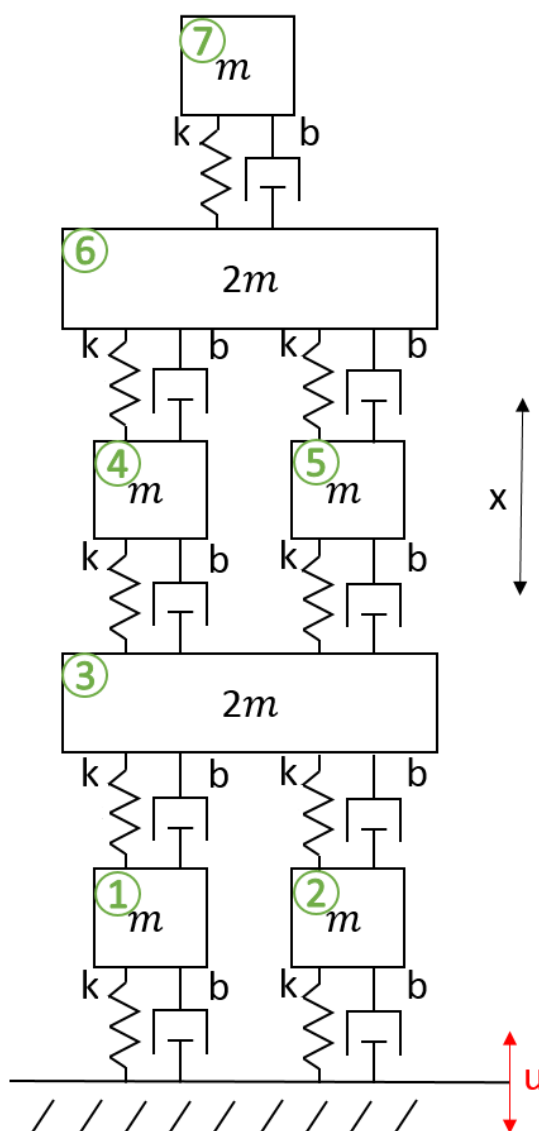
Výstupem skriptu jsou:

- Tlumené vlastní frekvence [1]
- Vlastní tvary [1]
- Poměrné útlumy
- Netlumené vlastní frekvence

Skript je součástí přílohy A.

6 Modelová soustava – výpočtové modelování

Pro ověřování výpočtovým modelováním byla zvolena modelová soustava se sedmi stupni volnosti dle Obr. 6.1. U této soustavy byly měněny hodnoty tlumení b a následně v souladu s teorií závěrečné práce analyticky určovány hodnoty poměrných útlumů. Zároveň byl vytvořen nový skript Odezva, který v prostředí Matlab a Simulink určoval odezvu této soustavy na buzení bílým šumem od základny.



Obr. 6.1: Modelová soustava

6.1 Skript Odezva

6.1.1 Vstupy

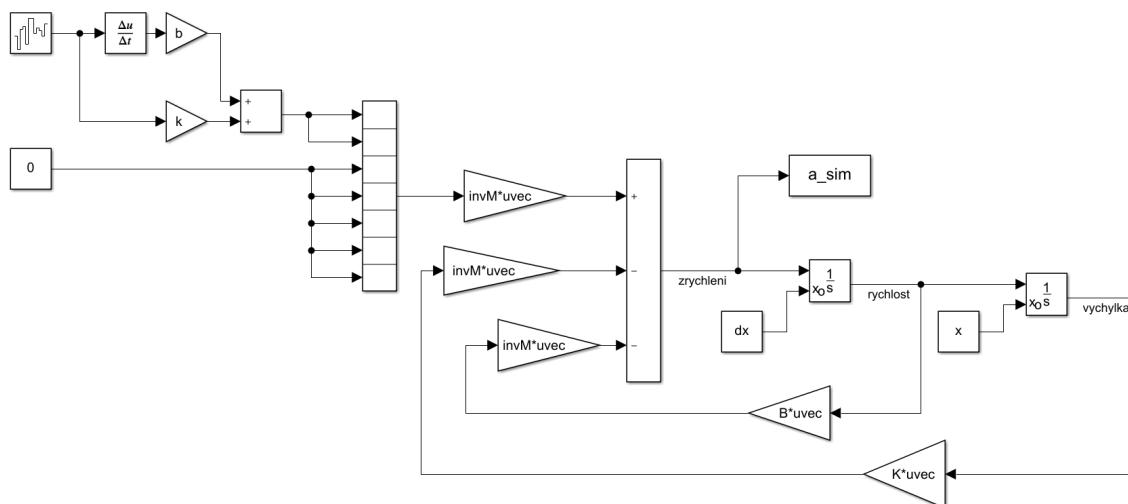
- Matice soustavy M , B a K
- Počáteční podmínky

6.1.2 Výstupy

- Vlastní frekvence
- Poměrný útlum vlastních tvarů
- Odezva soustavy

6.1.3 Simulink

Schéma řešiče v prostředí Simulink je uvedeno na Obr. 6.2. Levá část zobrazuje tvorbu buzení soustavy, pravá poté řešenou diferenciální rovnici. Vektory x a dx značí počáteční podmínky soustavy.



Obr. 6.2: Simulink schéma

6.2 Modelová soustava

Matice popisující vybranou modelovou soustavu:

$$\begin{aligned} m &= 1 \text{ kg} \\ b &= \{50, 100, 200, 300, 500, 800\} \text{ Ns/m} \\ k &= 5 \cdot 10^7 \text{ N/m} \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\mathbf{M} = m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

$$\mathbf{B} = b \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

$$\mathbf{K} = k \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

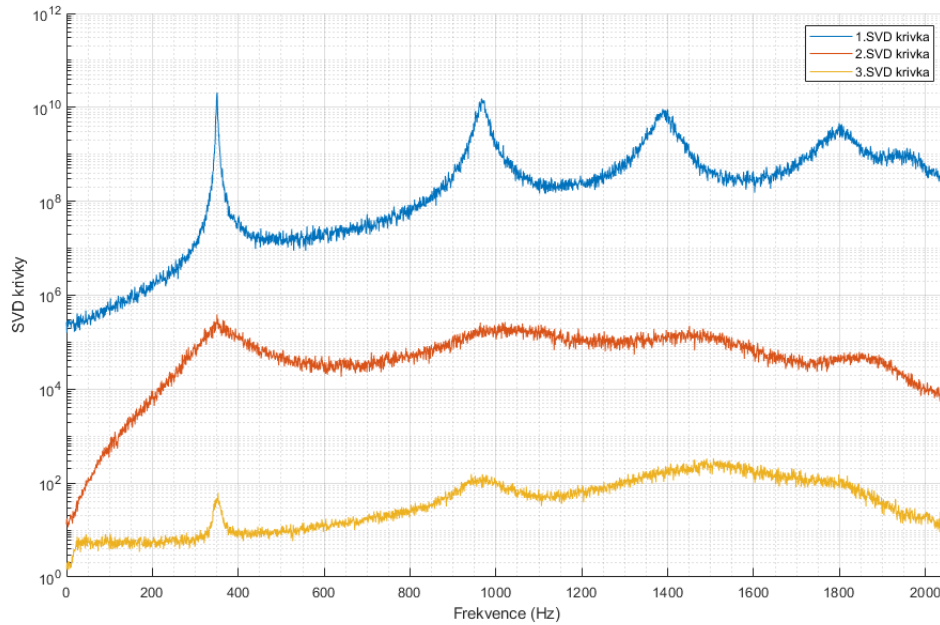
Počáteční podmínky:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.5)$$

6.3 Výsledky

Odezva byla vkládána do EFDD skriptu a určován poměrný útlum. Odezva byla rozdělena tak, že simulovala tři měření po třech posouvajících se snímačích a jednom referenčním snímači, což vedlo k přesnějším výsledkům a zároveň to napodobovalo reálnou situaci, kdy má uživatel omezený počet kanálů ústředny.

Při vyhodnocování nebylo možné najít v SVD křivkách všech sedm vlastních tvarů, takže jsou útlumy určovány pouze pro detekovatelné tvary. SVD křivky pro případ $b = 200 \text{ Ns/m}$ je zobrazen na Obr. 6.3.



Obr. 6.3: SVD křivky soustavy s $b = 200 \text{ Ns/m}$

Vlastní frekvence soustavy uvádí Tab. 6.1:

Pořadí vlastní frekvence n	1	2	3	4	5	6	7
Hodnota f_n [Hz]	350	967	1391	1592	1592	1799	2130

Tab. 6.1: Vlastní frekvence soustavy

Tab. 6.2 a 6.3 shrnují výsledky simulací.

Použitý skript, odezvy a konkrétní výběr oken jsou součástí přílohy B.

f_n [Hz]	$b = 50$ Ns/m		$b = 100$ Ns/m		$b = 200$ Ns/m	
	$b_{rTEOR}[\%]$	$b_{rOMA}[\%]$	$b_{rTEOR}[\%]$	$b_{rOMA}[\%]$	$b_{rTEOR}[\%]$	$b_{rOMA}[\%]$
350	0,11	0,14	0,22	0,23	0,44	0,37
967	0,38	0,23	0,61	0,39	1,22	0,81
1391	0,44	0,67	0,87	1,29	1,75	2,17
1799	0,57	1,97				

Tab. 6.2: Poměrné útlumy soustavy

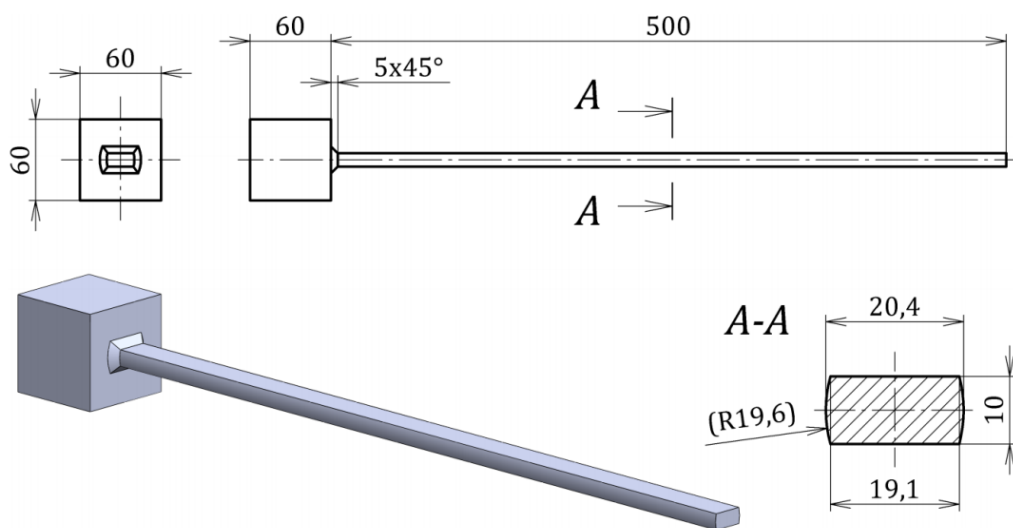
f_n [Hz]	$b = 300$ Ns/m		$b = 500$ Ns/m		$b = 800$ Ns/m	
	$b_{rTEOR}[\%]$	$b_{rOMA}[\%]$	$b_{rTEOR}[\%]$	$b_{rOMA}[\%]$	$b_{rTEOR}[\%]$	$b_{rOMA}[\%]$
350	0,66	0,55	1,1	0,73	1,76	1,24
967	1,82	1,5				

Tab. 6.3: Poměrné útlumy soustavy (pokračování)

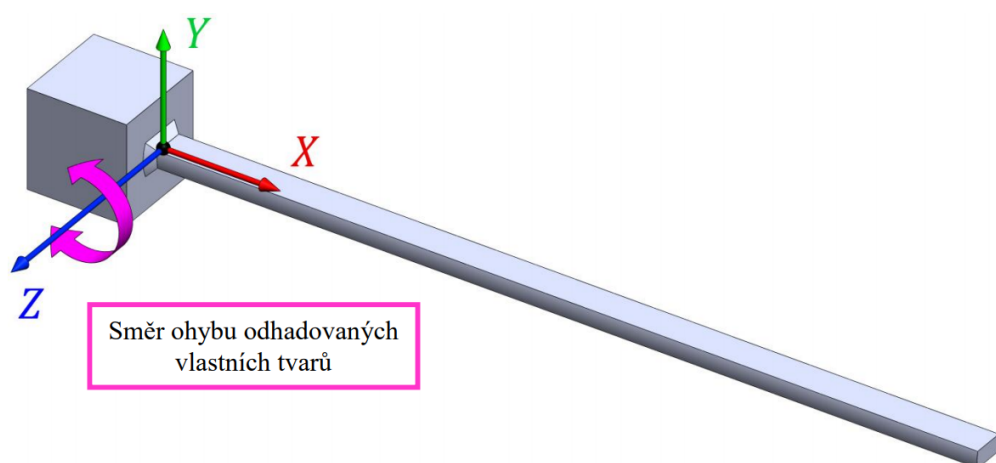
7 Strojní součást

7.1 Model soustavy

Jak již bylo zmíněno v úvodu, byla převzata naměřená data z [1]. Strojní součást – vetknutý ocelový prut byl tedy rovněž převzat. Model geometrie, směr ohybových kmitů a materiálové vlastnosti jsou uvedeny níže.



Obr. 7.1: Model geometrie [1]



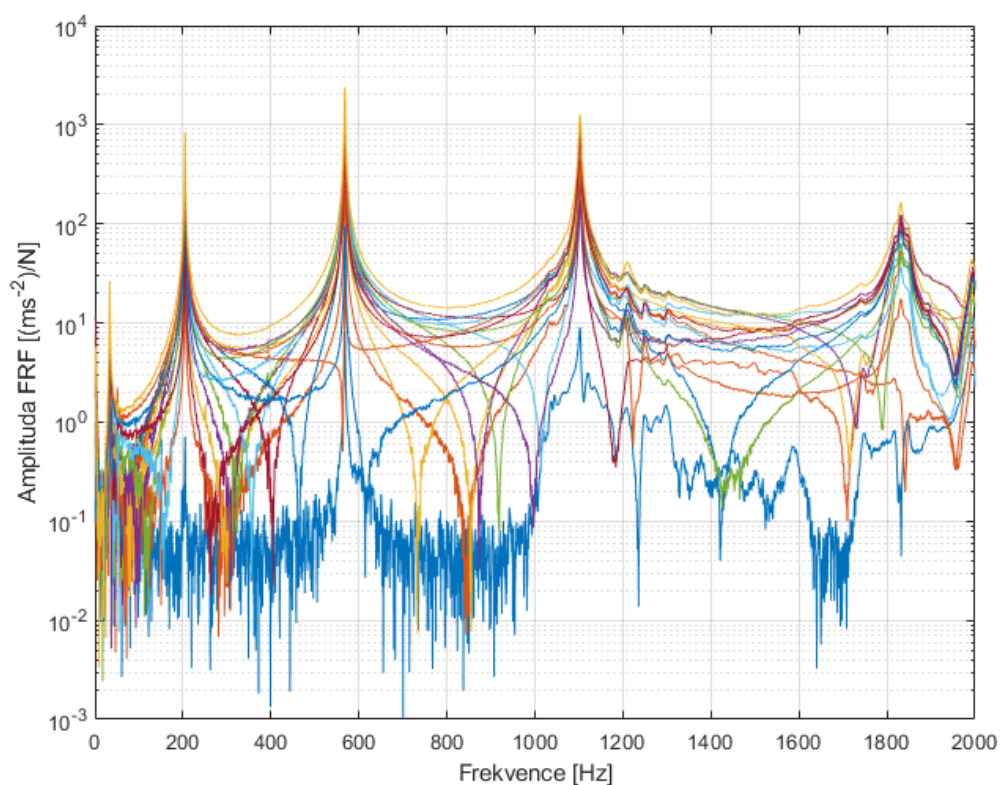
Obr. 7.2: Směr kmitání soustavy [1]

Youngův modul pružnosti	210 <i>GPa</i>
Poissonův poměr	0,3
Hustota	7850 <i>kg.m⁻³</i>

Tab. 7.1: Materiálové vlastnosti modelu

7.2 Experimentální modální analýza vybrané součásti

Z měření určená FRF zobrazená na Obr. 7.3 byla analyzována a algoritmem Circle fit určeny hodnoty poměrných útlumů a vlastní frekvence jednotlivých tvarů. Kompletní popis měřicí aparatury a nastavení měření je uveden v [1]. Určené hodnoty shrnuje Tab. 7.2.



Obr. 7.3: FRF strojní součásti

FRF a všechna vyhodnocená data jsou součástí přílohy C.

n	f_n [Hz]	b_{rEMA} [%]
1	32,7	0,6
2	203,7	0,2
3	567,2	0,12
4	1101,6	0,17
5	1830,7	0,69

Tab. 7.2: Poměrné útlumy součásti dle EMA

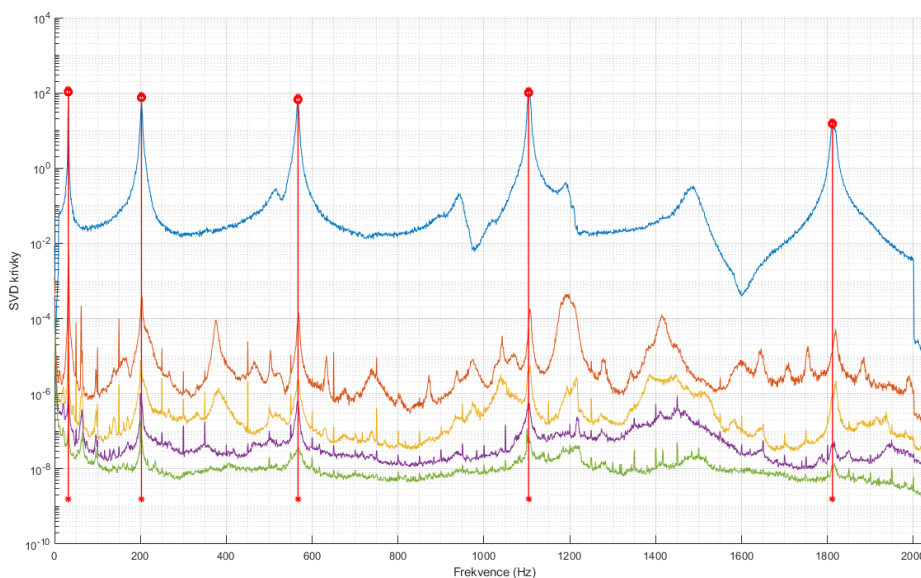
7.3 Provozní modální analýza vybrané součásti

Strojní součást byla rozdělena na 17 vyšetřovaných bodů. Měření probíhalo užitím jednoho referenčního snímače a čtyř posouvajících se. Vznikly tedy čtyři datové sady. Přesný popis měření je uveden v [1]. Tlumení bylo vyhodnocováno u vlastních tvarů do frekvence 2000 Hz.

7.3.1 Matlab skript – výsledky

Vyhodnocování strojní součásti probíhalo analogicky jako v kapitole *Modelová soustava – výpočtové modelování*. Určená tlumení shrnuje Tab. 7.3.

Obr. 7.4 zobrazuje SVD křivky analyzované součásti.



Obr. 7.4: SVD křivky strojní součásti

n	f_n [Hz]	$b_{rMATLAB}$ [%]
1	32	0,99
2	202,5	0,64
3	567	0,26
4	1104	0,15
5	1811,5	0,85

Tab. 7.3: Poměrné útlumy součásti dle EFDD skriptu

Tab. 7.4 nabízí výčet poměrných útlumů dle vlastních tvarů podle jednotlivých měření předtím než byly hodnoty statisticky zpracovány.

Číslo měření	b_{r1} [%]	b_{r2} [%]	b_{r3} [%]	b_{r4} [%]	b_{r5} [%]
1	0,873	0,69	0,237	0,149	0,865
2	1,039	0,628	0,284	0,157	0,928
3	0,944	0,633	0,239	0,141	0,812
4	1,123	0,623	0,272	0,137	0,811

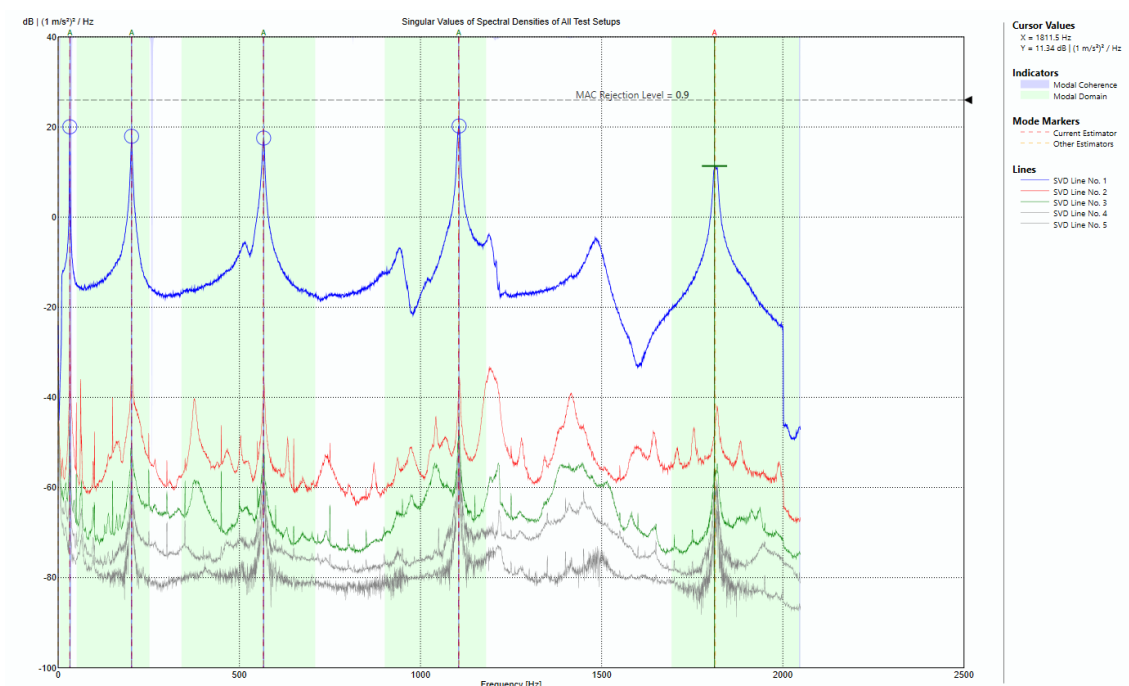
Tab. 7.4: Poměrné útlumy vlastních tvarů dle měření

Konkrétní výběr oken je součástí přílohy D.

7.3.2 OMA Pulse

Dále byla data analyzována v prostředí programu OMA Pulse od společnosti Brüel a Kjær. Prostředí tohoto programu je intuitivní a většina procesů automatická. Stejně tak je automaticky vybíráno okno. SVD křivky a prostředí programu OMA Pulse je zobrazeno na Obr. 7.5. Určené poměrné útlumy shrnuje Tab. 7.5. Pro pátý vlastní tvar se programu nepodařilo tlumení určit a autor práce nebyl schopen odhalit příčinu chyby.

Konkrétní výběr oken je součástí přílohy E.



Obr. 7.5: SVD křivky v prostředí OMA Pulse

n	f_n [Hz]	b_{rPULSE} [%]
1	32,3	1,09
2	202,6	0,77
3	566,7	0,34
4	1105,3	0,15
5	1811,5	—

Tab. 7.5: Poměrné útlumy součásti dle OMA Pulse

8 Srovnání výsledků

8.1 Modelová soustava

Tlumení určená pomocí EFDD Matlab skriptu byla společně se skutečnými hodnotami poměrných útlumů uvedena v tabulkách 6.2 a 6.3 na straně 53. Hodnoty, které naprogramovaný skript určil, se liší v průměru o 0,2 % od teoretické hodnoty. Symbol % v tomto případě značí jednotku poměrného útlumu b_r . Při relativním porovnání chyb od hypotetických hodnot, dosahuje odchylka 26 %. Vzhledem k autorovým znalostem z pole mechaniky těles, kdy se různé správné koncepce řešení úloh liší svými výsledky i o 15 % (například teorie $\max\tau$ a HMM) a složitosti problematiky tlumení o které se autor dočetl v uvedených zdrojích, lze tuto přesnost považovat za dostatečnou. Obdobné přesnosti je dosahováno např. v [5].

Výjimkou v souboru dat je hodnota poměrného útlumu pro frekvenci 1799 Hz a tlumení 50 Ns/m, kde relativní chyba dosahuje hodnoty 245 %.

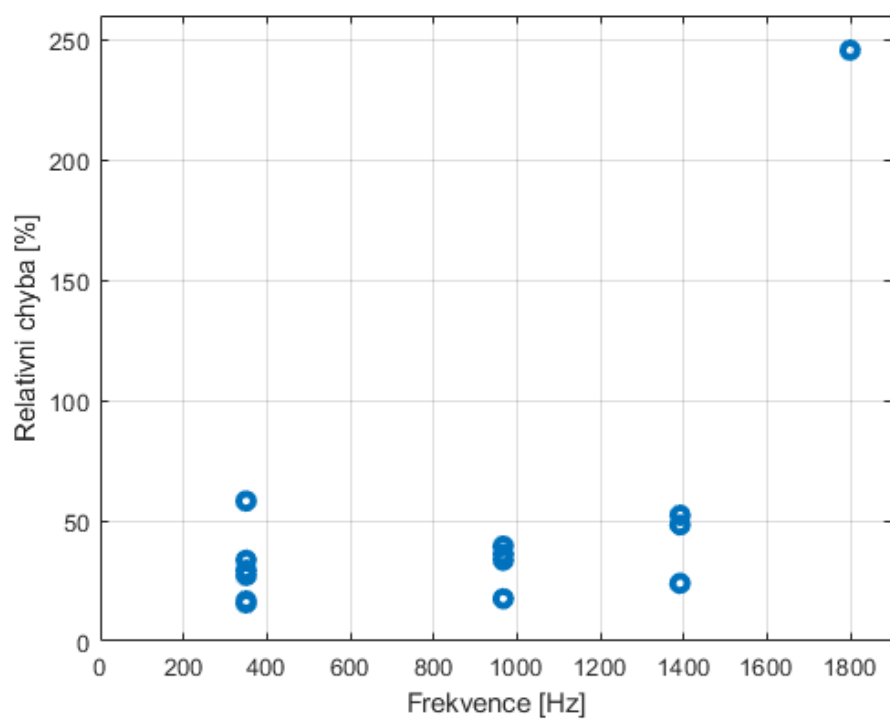
Obr. 8.1 a 8.2 vykreslují dvě závislosti. Na prvním je vyznačena relativní chyba poměrného útlumu v závislosti na frekvenci a na druhém je závislost relativní chyby na tlumení b .

Vzledem k tomu, že v prvním grafu je slabě zřetelný mírně rostoucí trend, byla tato hypotéza postoupena k dalšímu zkoumání a výpočtový model byl vyhodnocován i pro další hodnoty modálních veličin, přičemž vzorkovací frekvence $f_s = 4096$ Hz a tlumení $b = 50$ Nm/s zůstaly konstantní. Výsledkem je Obr. 8.3, který vykresluje více dat. Z grafu je zřejmé, že chyba rychle roste nad frekvencí $f = 1500$ Hz, což odpovídá přibližně třetině vzorkovací frekvence. Tento trend může být způsoben buď neodhalenou chybou v naprogramovaném skriptu nebo obecně EFDD metoda špatně vyhodnocuje tlumení tvarů blížících se Nyquistově frekvenci. Třetí a nejpravděpodobnější možností vysoké odchylky je nedostatečný počet vyhodnocovaných bodů, kdy 7 bodů není dostatek pro popis třetích až čtvrtých vlastních tvarů modelové soustavy, které v daném rozmezí frekvencí ležely.

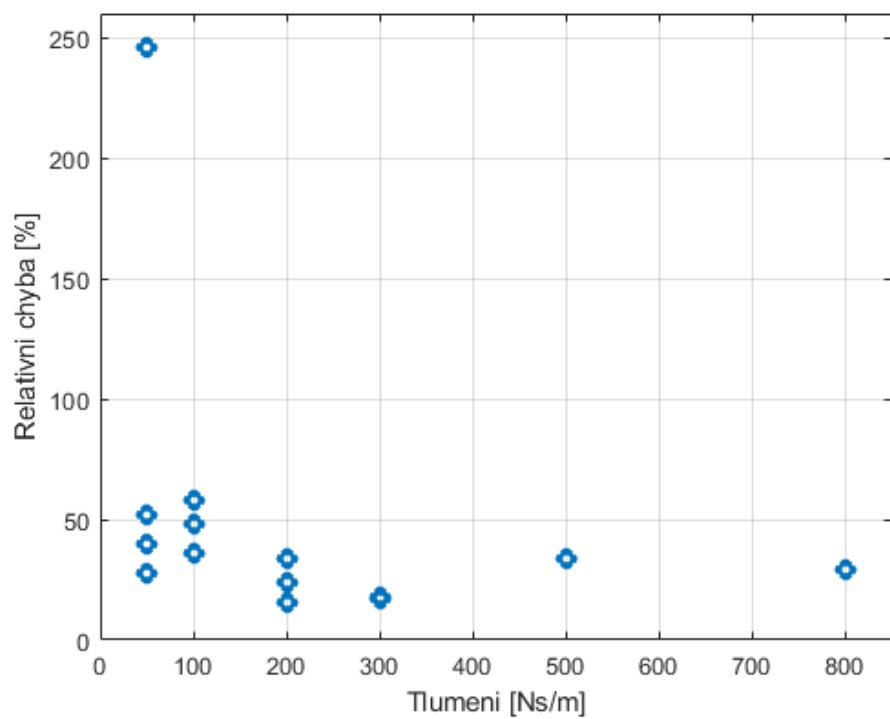
8.2 Strojní součást

Srovnání poměrných útlumů strojní součásti shrnuje Tab. 8.1. Uvedené frekvence vychází z EMA vyhodnocení. Hodnoty získané z OMA jsou odlišné, ale rozdíl je zanedbatelný. Uvedené hodnoty slouží pouze pro "spárování" uvedených vlastních tvarů.

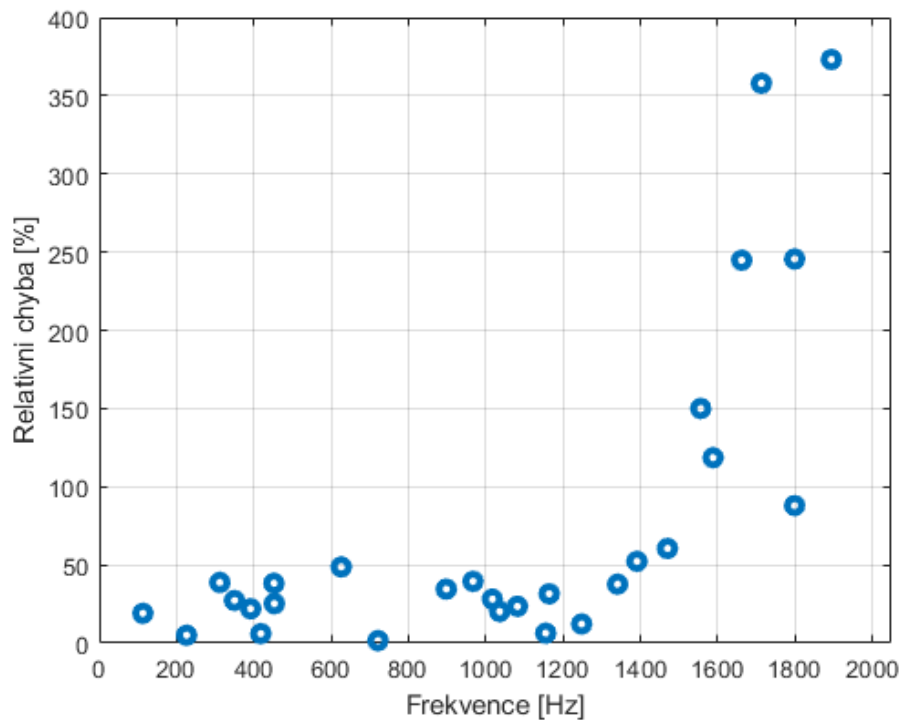
Při volbě hodnot poměrného útlumu b_{rEMA} jako referenčních (neboť EMA je přesnější než OMA [2]), je z porovnání zřejmé, že naprogramovaný skript dává přesnější výsledky než komerční program. Program zároveň neurčil tlumení pro pátý



Obr. 8.1: Relativní chyba v závislosti na frekvenci



Obr. 8.2: Relativní chyba v závislosti na tlumení



Obr. 8.3: Relativní chyba v závislosti na frekvenci

vlastní tvar. Opět je zde hypotéza o nedostatečné hustotě sítě snímačů.

Časová odezva generovaná programem OMA Pulse se mnohem více podobala teoretickému průběhu, tak jak ji zobrazuje například Obr. 3.5 na str. 39.

VI. tvar	f_n [Hz]	$b_{rEMA}[\%]$	$b_{rMATLAB}[\%]$	$b_{rPULSE}[\%]$
n				
1	32,7	0,6	0,99	1,09
2	203,7	0,2	0,64	0,77
3	567,2	0,12	0,26	0,34
4	1101,6	0,17	0,15	0,15
5	1830,7	0,69	0,85	—

Tab. 8.1: Porovnání poměrných útlumů

8.3 Platnost výsledků

Uvedené výsledky jsou platné za následujících dvou předpokladů:

1. Soustava je buzena bílým šumem

Splněno, neboť v modelové soustavě je bílý šum generován Simulink blokem

a v případě strojní součásti byl generován programem vibrační zařízení a následně i validován.

2. Soustava je lehce tlumená

Splněno, teoretické tlumení modelové soustavy nepřehuje 5 % a vyhodnocovaná strojní součást je pouze ocelové konstrukce, pro které obecně tlumení nepřesahuje 5 % [12].

Závěr

V rámci rešerše o problematice určování modálního tlumení obecně i konkrétně o provozní modální analýze byla nejdříve zpracována rešerše zdrojů, které se problematikou OMA zabývají. Následně v teoretické části práce shrnuje přístupy analytického určování odezvy a tlumení, principy experimentální modální analýzy a podrobně vysvětluje principy provozní modální analýzy s důrazem na metody FDD a EFDD.

V druhé části práce byly nabyté znalosti uplatněny při tvorbě skriptu EFDD metody v prostředí Matlab. Verifikace tohoto skriptu probíhala ve dvou krocích.

První krok spočíval v ověřování výpočtovým modelováním. Byl vytvořen výpočtový model modelové soustavy, který na základě vstupních hodnot určoval poměrné útlumy jednotlivých vlastních tvarů a odezvu modelu v časové oblasti pro buzení základnou bílým šumem. Tuto odezvu následně zpracovával vytvořený skript a určoval rovněž poměrné útlumy pro jednotlivé vlastní tvary.

Druhý krok spočíval v použití naměřených a zvalidovaných dat z [1] reálné strojní součásti – vetknutého nosníku a v jejich vyhodnocování metodami jak experimentální modální analýzou – metoda Circle Fit, tak provozní – vytvořený skript a komerční program OMA Pulse.

Skript v testování obstál. Podrobné výsledky a srovnání popisuje předchozí kapitola *Srovnání výsledků*. Za zmínku stojí fakt, že u vlastních tvarů jejichž frekvence je vyšší než třetina vzorkovací frekvence, bylo určené tlumení zatíženo mnohem větší chybou než tvary o frekvencích nižších. Viz Obr. 8.3 na straně 63.

Dalším způsobem, jak pokračovat ve studiu OMA je zaměření se na oblast stochastických metod, tzv. SSI (Stochastická identifikace podprostoru – Stochastic Subspace Identification) metody.

Diplomová práce splnila zadané cíle a vyřešila problémovou situaci vytvořením EFDD Matlab skriptu a jeho následnou validací porovnáním určených poměrných útlumů s hodnotami získanými z dalších metod modální analýzy.

Literatura

- [1] Pop.M (2019) *Ověřování věrohodnosti měřicí metody z oblasti modální analýzy* [online]. Brno. Dostupné z URL: <<https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/117598>> [cit. 21. 4. 2021] Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Martin Houfek.
- [2] Brincker R. a Ventura C. (2015) *Introduction to Operational Modal Analysis*. Nashville, TN: John Wiley & Sons.
- [3] Rainieri, C., & Fabbrocino, G. (2014) *Operational modal analysis of civil engineering structures: An introduction and guide for applications*. New York: Springer.
- [4] Au, S. (2017) *Operational modal analysis: Modeling, Bayesian inference, uncertainty laws*. Singapore: Springer.
- [5] Gade, S. & Møller, N. & Herlufsen, H. & Konstantin-Hansen, H. (2005) *Frequency Domain Techniques for Operational Modal Analysis*. In JSAE Annual Congress.
- [6] Pioldi, F. & Ferrari, R. & Rizzi, E. (2014) *A refined FDD algorithm for Operational Modal Analysis of buildings under earthquake loading*. in Proceedings of ISMA2014: International Conference on Noise & Vibration Engineering.
- [7] Jacobsen, N.-J., Andersen, P. & Brincker, R. (2006) *Using Enhanced Frequency Domain Decomposition as a Robust Technique to Harmonic Excitation in Operational Modal Analysis*. in Proceedings of ISMA2006: International Conference on Noise & Vibration Engineering.
- [8] Lorenzoni, F., Casarin, F., Modena, C., Caldon, M., Islami, K., & Porto, F. D. (2013) *Structural health monitoring of the Roman Arena of Verona, Italy*. Journal of Civil Structural Health Monitoring, 3(4), 227-246. doi:10.1007/s13349-013-0065-0
- [9] Rao, S. & Griffin, P. (2018) *Mechanical vibrations*. Harlow, United Kingdom: Pearson
- [10] Song, Z., & Su, C. (2017) *Computation of rayleigh damping coefficients for the seismic analysis of a hydro-powerhouse*. Shock and Vibration, 2017, 1-11.

- [11] Šmíd D. (2021) *Lineární algebra pro fyziky*. Dostupné z URL: <<https://drive.google.com/file/d/1lUkv7hH941kh4dc0B1SgoQx8cK0Wbdky/view>>
[cit. 1. 4. 2021] Karlova univerzita, Matematicko-fyzikální fakulta
- [12] Ewins, D. J. (2000) *Modal testing: Theory, practice and application*. Hertfordshire: Research Studies Press.
- [13] Batel M. (2002) *Operational Modal Analysis – Another Way of Doing Modal Testing*. Sound and Vibration Magazine, August 2002

Seznam obrázků

1.1	Odezva soustavy v závislosti na tlumení	23
1.2	Amplitudo-frekvenční charakteristika v závislosti na tlumení	24
1.3	Modelová soustava	25
1.4	Vyjádření vlastního čísla v komplexní rovině	27
1.5	Příklad odezvy tlumené soustavy	28
2.1	FRF	32
2.2	Peak picking	33
2.3	Circle fit	34
3.1	Grafické znázornění zpracování $G_{yy}(\omega)$	36
3.2	SVD křivky soustavy	37
3.3	SVD křivky	38
3.4	MAC matice	39
3.5	Příklad odezvy tlumené soustavy	39
3.6	Postup Bell Identification	40
3.7	Odezva v časové oblasti a výběr vhodného okna	41
3.8	Vykreslené hodnoty dle rovnice 3.8 a jejich fit	42
5.1	Postup výběru hraniční frekvence	46
5.2	Vektory komplexních čísel pro jednotlivé tvary	46
6.1	Modelová soustava	49
6.2	Simulink schéma	50
6.3	SVD křivky soustavy s $b = 200 \text{ Ns/m}$	52
7.1	Model geometrie [1]	55
7.2	Směr kmitání soustavy [1]	55
7.3	FRF strojní součásti	56
7.4	SVD křivky strojní součásti	57
7.5	SVD křivky v prostředí OMA Pulse	59
8.1	Relativní chyba v závislosti na frekvenci	62
8.2	Relativní chyba v závislosti na tlumení	62
8.3	Relativní chyba v závislosti na frekvenci	63

Seznam tabulek

6.1	Vlastní frekvence soustavy	52
6.2	Poměrné útlumy soustavy	53
6.3	Poměrné útlumy soustavy (pokračování)	53
7.1	Materiálové vlastnosti modelu	56
7.2	Poměrné útlumy součásti dle EMA	57
7.3	Poměrné útlumy součásti dle EFDD skriptu	58
7.4	Poměrné útlumy vlastních tvarů dle měření	58
7.5	Poměrné útlumy součásti dle OMA Pulse	59
8.1	Porovnání poměrných útlumů	63

Obsah elektronické přílohy

A

EFDD a související skripty

- Ukazka_VUT_OMA_EFDD.m
- VUT_OMA_EFDD.m
- VEKTOR.m
- VUT_MAC.m

B

Data vztahující se k výpočtovému modelování modelové soustavy a k OMA EFDD skriptem

- odezva_skript složka
 - odezva_virt.mat
 - odezva_virt_sim.slx
- b=50 složka (Analogický rozpad pro další složky přílohy)
 - okno_fit složka
 - * png obrázky výběru oken a fitu
 - odezva.mat
 - svd_krivky.png
- b=100
- b=200
- b=300
- b=500
- b=800

C

Data vztahující se k EMA strojní součásti

- circle_fit.xlsx
- frf.mat

D

Data vztahující se k OMA strojní součásti EFDD skriptem

- okna-fit složka

- png obrázky výběru oken a fitu
- svd_krivky.png

E

Data vztahující se k OMA strojní součásti v OMA Pulse

- okna-fit složka
 - png obrázky výběru oken a fitu
- svd_krivky.png